به نام خدا

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران
دانشکده مکانیک، برق و کامپیوتر

ریاضی مهندسی

ENGINEERING MATHEMATICS

فائزه فریور
F.Farivar@srbiau.ac.ir

فصل دوم

1

سرفصل مطالب

فصل دوم توابع مختلط

۱) یادآوری
۲) توابع مختلط
۱ـ حد و پیوستگی در توابع مختلط
۲ـ مشتق تابع مختلط
۳) قضایای کوشی ریمان
۱ـ قضیه اول کوشی ریمان
۲ـ قضیه دوم کوشی ریمان
۳ـ تابع همساز

2

اعداد مختلط (یادآوری)

در عدد مختلط $z = x + iy$ که در آن $i = \sqrt{-1}$ و $Im(z) = y$ و $Re(z) = x$، روابط اولیه زیر برقرار است:

ریشه دوم عدد -1 در مجموعه اعداد حقیقی تعریف نشده و با تعریف $i = \sqrt{-1}$، مجموعه اعداد مختلط را تعریف می‌کنیم. پس مجموعه اعداد حقیقی زیرمجموعه اعداد مختلط می‌باشد.

عدد موهومی محض: $i^2 = -1$

عدد مختلط در حالت کلی: $z = x + iy$

$Re(z)$ یا z بخش حقیقی

$Im(z)$ یا z بخش موهومی

قدرمطلق یا مدول z: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

مزدوج عدد مختلط z: $\bar{z} = x - iy$

3

اعداد مختلط (یادآوری)– تساوی و جمع و تفریق

دو عدد مختلط $\begin{cases} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{cases}$

تساوی دو عدد مختلط $\Rightarrow \quad z_1 = z_2 \longrightarrow x_1 = x_2 \ و \ y_1 = y_2$

توجه: در مجموعه اعداد مختلط، ترتیب یا بزرگ‌تر و کوچک‌تر معنا ندارد.

در مجموعه اعداد مختلط، برای صفر بودن یک عدد مختلط باید بخش حقیقی و موهومی، هر دو صفر باشند یعنی باید مدول z، صفر باشد.

جمع دو عدد مختلط $\quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

تفریق دو عدد مختلط $\quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

4

اعداد مختلط (یادآوری)– ضرب و تقسیم

ضرب دو عدد مختلط: $z_1 z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = x_1x_2 + i(x_1y_2+x_2y_1) + i^2(y_1y_2)$

$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

تقسیم دو عدد مختلط $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} \times \frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2} = \cdots$

صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x^2+y^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x^2+y^2}$

5

اعداد مختلط (یادآوری)–معرفی چند ویژگی

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\bar{z}$ مزدوج $= x - iy$

$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = |z|^2 \rightarrow z\bar{z} = |z|^2$

$z + \bar{z} = 2\,Re(z)$

$z - \bar{z} = 2i\,Im(z)$

$|z| = |\bar{z}|$

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$\left(\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

6

توابع مختلط (یادآوری)– معرفی چند منحنی در صفحه مختلط

حال اگر $z = x + iy$ و $z_0 = x_0 + iy_0$ یک عدد مختلط باشد داریم:

$|z - z_0| = R$ یک دایره به شعاع $\mathbf{R}$ و به مرکز z_0 می‌باشد.

$|z - z_0| + |z - z_1| = R$ بیانگر یک بیضی با کانون‌های z_0 و z_1 می‌باشد، (با شرط $|z_0 - z_1| < R$)

$|z - z_0| - |z - z_1| = R$ بیانگر یک هذلولی با کانون‌های z_0 و z_1 می‌باشد، (با شرط $|z_0 - z_1| > R$)

رابطه $|z - z_1| = |z - z_0|$ بیانگر عمود منصف پاره خطی است که دو سر آن روی z_0 و z_1 است.

7

اعداد مختلط (یادآوری)– چند نکته

1- z حقیقی است اگر و تنها اگر $z = \bar{z}$

2- z حقیقی یا موهومی محض است اگر و تنها اگر $z^2 = \bar{z}^2$

3- z موهومی محض است اگر و تنها اگر $z + \bar{z} = 0$

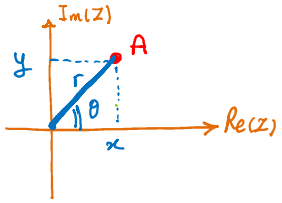
8

اعداد مختلط (یادآوری)– فرم قطبی اعداد مختلط

- فرم قطبی یک عدد مختلط به صورت $z = re^{i\theta}$ است که $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

$$Z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z = \underbrace{r\cos\theta}_{x} + i\underbrace{r\sin\theta}_{y} = x + iy$$



$x = Re(z) = r\cos\theta \rightarrow x^2 = r^2\cos^2\theta$

$y = Im(z) = r\sin\theta \rightarrow y^2 = r^2\sin^2\theta$

$\rightarrow x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$\rightarrow r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = tg\,\theta \rightarrow \theta = Arc\,tg\left(\frac{y}{x}\right)$$

9

اعداد مختلط (یادآوری)– فرم قطبی اعداد مختلط

مزیت فرم قطبی: عملیات ضرب، تقسیم و توان رساندن در فرم قطبی ساده‌تر است.

$$Z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$

$$Z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$Z_1 Z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

$$Z_1^n = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right)^n = r_1^n\left(e^{i\theta_1}\right)^n = r_1^n e^{in\theta_1} = r_1^n\left(\cos(n\theta_1) + i\sin(n\theta_1)\right)$$

10

❑ مثال حل‌شده

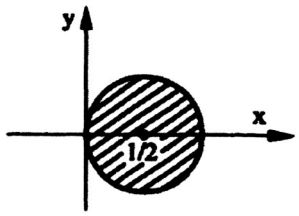
مثال : مکان هندسی نقاطی از صفحه، که با رابطه $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)>1$ تعریف می‌شود را مشخص کنید.

حل :

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}\times\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}>1\Rightarrow x^2+y^2-x<0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\frac{1}{4}$$



بنابراین مکان هندسی موردنظر داخل دایره‌ای به مرکز $\left(\frac{1}{2},0\right)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ است.

$$\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+y^2<0 \longrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\frac{1}{4}$$

11

❑ مثال حل‌شده

مثال : هرگاه $z=x+iy$ باشد، آن‌گاه نامعادله $\frac{|z-3|}{|z+3|}<2$ را ساده کنید.

حل :

$$\frac{|x+iy-3|}{|x+iy+3|}<2 \rightarrow \frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\sqrt{(x+3)^2+y^2}}<2$$

$$\frac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2}<4 \rightarrow 3x^2+30x+27+3y^2>0 \xrightarrow{\times\frac{1}{3}} x^2+10x+9+y^2>0$$

$$\left(x^2+10x+25\right)-25+9+y^2>0 \rightarrow (x+5)^2+y^2-16>0$$

$$(x+5)^2+y^2>16 \rightarrow |z+5|>4$$

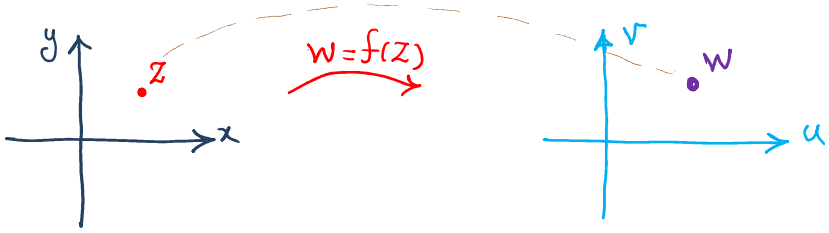
مکان هندسی نقاطی خارج از دایره‌ای به مرکز $z_0=-5$ و به شعاع $R=4$

12

توابع مختلط

تابع مختلط $w = f(z)$

$$w = f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$$



13

حد و پیوستگی در توابع مختلط

$$w = f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$$

تابع مختلط $w = f(z)$ که $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ را در نظر بگیرید، می‌گوییم این تابع مختلط در نقطه z_0 دارای حد است، هرگاه هر دو تابع دو متغیره $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) دارای حد تابع باشند. هم‌چنین می‌گوییم تابع مختلط $w = f(z)$ در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ پیوسته است هرگاه هر دو تابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در (x_0,y_0) پیوسته باشد.

$z_0 = x_0 + iy_0$

به عبارت دیگر:

$$f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y) \quad \Rightarrow \quad \lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$$

14

حد و پیوستگی در توابع مختلط

تذکر: ملاحظه می‌شود که بحث حد توابع مختلط ارتباط نزدیکی با حد توابع دو متغیر دارد و می‌دانیم حاصل یک حد دو متغیره در صورت وجود، باید منحصر به فرد باشد و لذا اگر دو طریق مختلفی که برای محاسبهٔ یک حد دو متغیره استفاده می‌شود به دو جواب مختلف منجر شود حاصل آن حد دو متغیره موجود نیست.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} u(x,y)\right) \\ \lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} u(x,y)\right) \end{cases}$$

اگر این دو جواب یکی نباشد تابع دو متغیره $u(x,y)$ در نقطه $z_0=x_0+iy_0$ حد ندارد

به همین ترتیب برای تابع دو متغیره $v(x,y)$ باید بررسی شود.

❑ مثال حل‌شده

مثال : مقدار ثابت α را چقدر انتخاب کنیم تا تابع مختلط $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z+\mathrm{Im}\,z}{2\bar{z}+\mathrm{Re}\,z} & z\neq 0\\ \alpha & z=0\end{cases}$ در $z=0$ پیوسته باشد.

حل :

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z+\mathrm{Im}\,z}{2\bar{z}+\mathrm{Re}\,z}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+iy)+y}{2(x-iy)+x}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y(i+1)}{3x-2iy}=\frac{0}{0}$$ مبهم

اگر ترتیب میل کردن متغیر را به صفر در نظر بگیریم:

۱ـ اول فرض می‌کنیم که $x\to 0$ و بعد $y\to 0$ میل می‌کند.

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{(x+iy)+y}{2(x-iy)+x}=\lim_{y\to 0}\frac{y(i+1)}{-2iy}=\frac{i+1}{-2i}$$

۲ـ اول فرض می‌کنیم که $y\to 0$ و بعد $x\to 0$ میل می‌کند.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{(x+iy)+y}{2(x-iy)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$$

پس چون دو جواب مختلف به‌دست آوردیم تابع در $z=0$ دارای حد نیست و به ازای هیچ مقدار α در این نقطه پیوسته نمی‌شود.

❑ مثال حل‌شده

مثال : تابع مختلط $f(z)=\frac{xy^2}{x^2+y^2}+i\frac{xy}{x^2-y^2}$ را در نظر بگیرید، آیا این تابع در نقطه $z=0$ دارای حد می‌باشد.

u v

حل :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)=\lim\frac{xy^2}{x^2+y^2}\xrightarrow{\text{در مختصات قطبی}}\lim_{r\to0,\forall\theta}\frac{r\cos\theta.r^2\sin^2\theta}{r^2}=\lim_{r\to0,\forall\theta}r\cos\theta.\sin^2\theta=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y)=\lim\frac{xy}{x^2-y^2}\xrightarrow{\text{در مختصات قطبی}}\lim_{r\to0,\forall\theta}\frac{r\cos\theta.r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}=\frac{\cos\theta.\sin\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$

(وابسته به θ است (حد موجود نیست))

پس در کل حد $f(z)$ در $z=0$ وجود ندارد.

17

مشتق در توابع مختلط

می‌گوییم تابع $f(z)$ در نقطه z_0 مشتق‌پذیر است هرگاه حد زیر موجود باشد.

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

و هم‌چنین $f'(z)$ در صورت وجود از رابطهٔ زیر نیز به‌دست می‌آید:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

18

❑ مثال حل‌شده

مثال : تابع $f(z)=\mathrm{Im}(z)$ مفروض است، این تابع در کجا پیوسته و در کجا مشتق‌پذیر است؟

حل :

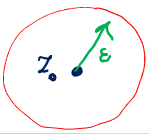
$$U=0 \quad V=y \quad f(z)=y$$

به وضوح دیده می‌شود که توابع U و V همه جا پیوسته هستند، لذا $f(z)$ همه جا پیوسته است.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\mathrm{Im}(z+\Delta z)-\mathrm{Im}(z)}{\Delta z}=\lim_{(\Delta y,\Delta x)\to(0,0)}\frac{(y+\Delta y)-y}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{(\Delta y,\Delta x)\to(0,0)}\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\begin{cases}\Delta x\to 0 \ , & f'(z)=\frac{1}{i}\\ \Delta y\to 0 \ , & f'(z)=0\end{cases}$$

پس حد مذکور موجود نیست و لذا $f(z)$ هیچ‌جا مشتق ندارد.

تعاریف



می‌گوییم تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی است هرگاه در این نقطه یک همسایگی به شعاع ε از این نقطه مشتق‌پذیر باشد (بنابراین مشتق‌پذیر بودن یک تابع در یک نقطه شرط لازم و نه کافی برای تحلیلی بودن آن تابع در نقطه مذکور است).

تمام توابع چند جمله‌ای از z مانند $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}\cdots+a_0$ که در آن n عددطبیعی و $a_0,\ldots,a_n$ اعداد مختلط باشند همه‌جا تحلیلی هستند.

تمام توابع گویا مانند $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ که در آن $P(z)$ و $Q(z)$ دو چند جمله‌ای از z می‌باشند در همه جا به جز احتمالاً صفرهای مخرج تحلیلی هستند.

توابع $e^z,\cos z,\sin z$ همه جا تحلیلی هستند.

ترکیب دو تابع تحلیلی، fog، یک تابع تحلیلی است.

نقطه تکین

نقطه تکین: فرض کنید تابع مختلط $f(z)$ در تمام نقاط به جز نقاطی خاص تحلیلی باشد به آن نقاط خاص، نقاط تکینی تابع گفته می‌شود. بنابراین اگر تابعی هیچ جا تحلیلی نباشد، هیچ نقطهٔ تکینی ندارد.

به طور مثال در تابع $f(z)=e^{\cos z}+z^2$، چون $\cos z$ و e^z و z^2 توابعی تحلیلی هستند پس جمع آن‌ها نیز یک تابع تحلیلی می‌باشد.

تابع $f(z)=\mathrm{Im}(z)$ هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیست، بنابراین در هیچ‌جا تحلیلی نیست، پس اصلاً نقطهٔ تکینی ندارد.

در اسلاید 19 بررسی شد.

21

قضایای کوشی ریمان - قضیه اول

قضیه اول کوشی ـ ریمان

هرگاه تابع مختلط $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در نقطه $z_0=x_0+iy_0$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$$f'(z_0)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}$$

و توابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) در شرایط زیر که به معادلات کوشی ـ ریمان مشهورند صدق می‌کنند.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

22

قضایای کوشی ریمان - قضیه اول

قضیه اول کوشی ـ ریمان

هرگاه تابع مختلط $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در نقطه $z_0=x_0+iy_0$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$$f'(z_0)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}$$

و توابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) در شرایط زیر که به معادلات کوشی ـ ریمان مشهورند صدق می‌کنند.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

$$f'(z_0)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{i}{i}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+i\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{i}\left(i\frac{\partial v}{\partial y}-i^2\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{i}\left(i\frac{\partial v}{\partial y}-(-1)\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$f'(z_0)=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}$$

23

قضایای کوشی ریمان - قضیه دوم

قضیه دوم کوشی ـ ریمان

تابع مختلط $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را در نظر بگیرید. چنانچه توابع v و u در نقطه (x_0,y_0) معادلات کوشی ـ ریمان را ارضا کنند، و توابع v و u و u_x و u_y و v_x و v_y در نقطه (x_0,y_0) و همسایگی آن پیوسته باشند، آن‌گاه تابع مختلط $w=f(z)$ در نقطه $x_0+iy_0=z_0$ مشتق‌پذیر است.

توجه کنید برقراری معادلات کوشی ـ ریمان در یک نقطه شرط لازم ولی غیرکافی برای مشتق داشتن یک تابع مختلط در آن نقطه است. بنابراین عدم برقراری معادلات کوشی ـ ریمان در یک نقطه عدم مشتق‌پذیری تابع مختلط مورد نظر در نقطهٔ مذکور را نتیجه می‌دهد.

24

❑ مثال حل‌شده

مثال : تابع مختلط زیر مفروض است این تابع در چه نقاطی مشتق‌پذیر است و مشتق آن در آن نقاط چیست؟

$$f(z)=2\mathrm{Re}\,z+\bar{z}+z^2$$

$z^2=(x+iy)^2=x^2+(iy)^2+i(2xy)=(x^2-y^2)+i(2xy)$

حل :

$$f(z)=2x+x-iy+x^2-y^2+2ixy=(3x+x^2-y^2)+i(2xy-y)$$

$$\begin{cases}u(x,y)=3x+x^2-y^2\\ v(x,y)=2xy-y\end{cases}$$

$u(x,y)$ $\qquad$ $v(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3+2x \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2x-1$$

چون $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$ بنابراین تابع $f(z)$ در هیچ کجا مشتق‌پذیر نیست.

25

❑ مثال حل‌شده

$z^2=x^2-y^2+i(2xy)\rightarrow \mathrm{Re}(z^2)=x^2-y^2$

$z\bar{z}=x^2+y^2$

مثال : تابع مختلط زیر را در نظر بگیرید در چه نقاطی مشتق‌پذیر می‌باشد؟

$$f(z)=\mathrm{Re}\,z^2+iz\bar{z}$$

حل :

$$f(z)=(x^2-y^2)+i(x^2+y^2)\rightarrow\begin{cases}u=x^2-y^2\\ v=x^2+y^2\end{cases}$$

برقراری معادلات کوشی ـ ریمان می‌طلبد:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow 2x=2y\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial v}{\partial x}=-2y=-2x\end{cases}$$

بنابراین معادلات کوشی ـ ریمان فقط روی خط $y=x$ برقرار است.

چون توابع u و v و u_x، u_y و v_x و v_y همه جا پیوسته است.

بنابراین تابع در اطراف خط $y=x$ نیز پیوسته است و $f(z)$ در روی خط $y=x$ مشتق‌پذیر است:

$f'(z)=2x+i(2x)$ (روی خط $y=x$)

26

❑ مثال حل‌شده

مثال : اگر $f(z)=-\mathrm{Re}(z^2)+iz\bar{z}$ آنگاه تابع $f(z)$ در کجا مشتق‌پذیر است؟

$f(z)=y^2-x^2+i(y^2+x^2)$ باشد، در این صورت داریم: $v=y^2+x^2$ و $u=y^2-x^2$ لذا برای برقرای معادلات کوشی ریمان باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow -2x=2y\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow 2y=-2x\end{cases}$$

معادلات مذکور تنها روی خط $y=-x$ برقرارند و با استفاده از قضیه دوم کوشی ریمان می‌توان نشان داد، تنها روی این خط تابع $f(z)$ مشتق‌پذیر است بنابراین تابع در هیچ کجا (حتی روی خط مزبور) تحلیلی نیست.

27

معادلات کوشی ریمان در فرم قطبی

هرگاه تابع $f(z)$ در دستگاه مختصات قطبی به فرم زیر بیان شده باشد:

$$f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)\quad,\quad z=re^{i\theta}$$

معادلات کوشی ریمان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

28

معادلات کوشی ریمان در فرم قطبی

$$f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$$

و $f'(z)$ درصورت وجود از رابطه زیر بدست می آید :

$$\boxed{f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)e^{-i\theta}}$$

نکته :

$$u_x = u_r \cos\theta - u_\theta \frac{\sin\theta}{r}$$

$$u_y = u_r \sin\theta + u_\theta \frac{\cos\theta}{r}$$

29

معادلات کوشی ریمان در فرم قطبی

توجه : بسیاری مواقع برای بررسی معادلات کوشی ریمان مناسب است از دستگاه مختصات قطبی استفاده شود. اگر مثالهای مورد بررسی توابع ساده ای باشند که بتوان به راحتی u و v آنها را بیابیم، چندان تفاوتی ندارد مانند $f(z)=z^4$ در اسلاید بعدی اما برای برخی توابع این چنین نیست.

30

معادلات کوشی ریمان در فرم قطبی

مثال در مختصات دکارتی

$$w = f(z) = z^4$$

$$w = (x+iy)^4$$

$$= \underbrace{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}_{u} + i\underbrace{(4x^3y - 4xy^3)}_{v}$$

$$u_x = v_y = 4x^3 - 12xy^2$$

$$u_y = -v_x = -12x^2y + 4y^3$$

معادلات کوشی ریمان همواره برقرار است.

مثال در مختصات قطبی

$$w = (re^{i\theta})^4 = r^4 e^{i(4\theta)}$$

$$= \underbrace{r^4\cos 4\theta}_{u} + i\underbrace{r^4 \sin 4\theta}_{v}$$

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta = 4r^3\cos 4\theta$$

$$\frac{1}{r} u_\theta = -v_r = -4r^3 \sin 4\theta$$

معادلات کوشی ریمان همواره برقرار است

تابع همساز

تابع حقیقی $h(x,y)$ را تابعی همساز می‌گوییم هرگاه معادله لاپلاس را ارضا کند.

معادله لاپلاس

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

$f(z)$

قضیه: چنانچه تابع مختلط $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تابعی تام باشد، یعنی همه‌جا تحلیلی باشد، آن‌گاه معادلات کوشی ریمان همه جا برقرارند و نیز هر دو تابع v و u توابعی همسازند و اصطلاحاً در این شرایط می‌گوییم v مزدوج همساز u می‌باشد.

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

قضیه اول برای توابع مختلط تام

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

$$f'(z_0)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}$$

$$f'(z_0)=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}$$

$$f'(z_0)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}$$

33

❑ مثال حل‌شده

مثال : می‌دانیم تابع $f(z)=u(y)+iv(x,y)$ تابعی همواره تحلیلی است کلی ترین ضابطه‌ای که $f(z)$ برحسب z را دارد مشخص کنید:

حل :

معادلات C. R باید همواره برقرار باشد.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

از آن‌جا که $u=u(y)$ لذا $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ و از معادله اول داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=0\longrightarrow v=v(x)$$

پس از معادله دوم داریم:

$$u'(y)=-v'(x)=k$$

($u'(y)$: عبارت برحسب y، $-v'(x)$: عبارت برحسب x)

34

ادامه‌ی مثال حل‌شده

توجه کنید که رابطه‌ی $u'(y) = -v'(x)$. تنها زمانی برقرار خواهد بود که هر دو تابع، تابع ثابت باشند.

$u'(y) = -v'(x) = k$

پس

$u(y) = ky + A \leftarrow u'(y) = k \rightarrow \frac{du}{dy} = k \rightarrow u = ky + A$

$v(x) = -kx + B \leftarrow v'(x) = -k \rightarrow \frac{dv}{dx} = -k \rightarrow v = -kx + B$

پس داریم:

$$f(z) = \underbrace{(ky + A)}_{u} + i\underbrace{(-kx + B)}_{v} = -ik(x + iy) + A + iB$$

$$f(z) = -ikz + c$$

نکته

$x \rightarrow z$

$y \rightarrow 0$

توجه کنید، وقتی تابع تحلیلی $f(z)$ برحسب (x,y) پیدا شد، برای نوشتن آن بر حسب z کافی است همه x ها را به z و همه yها را به صفر تبدیل کنیم.

35

مثال حل‌شده

مثال : چنانچه u مزدوج همساز v و v مزدوج همساز u باشد. توابع u و v باید دارای چه شرطی باشند؟

حل :

v مزدوج همساز u $\Rightarrow u + iv$ تابع تحلیلی

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow u_y = v_x$

$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow v_y = -u_x$

u مزدوج همساز v $\Rightarrow v + iu$ تابع تحلیلی

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow u_x = v_y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow u_y = -v_x$

$u_x = 0 \rightarrow u_y = 0 \rightarrow$ u ثابت

با کمی مقایسه روابط داریم:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow u = \text{ثابت}$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow v = \text{ثابت}$

$v_x = u_y$, $u_y = -v_x \rightarrow v_x = 0$

$v_y = -u_x$, $u_x = v_y \rightarrow v_y = 0$

$\rightarrow$ v ثابت

36

❑ مثال حل‌شده

مثال : اگر تابع $f(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ همه جا تحلیلی باشد، معادلات حاکم بر u و v را به‌دست آورید.

حل :

شروع

$$f(z)=U+iV$$

$$f(z)=(u_x+v_y)+i(v_x-u_y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_x+v_y)=\frac{\partial}{\partial y}(v_x-u_y)\rightarrow u_{xx}+v_{xy}=v_{xy}-u_{yy}\rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_x+v_y)=-\frac{\partial}{\partial x}(v_x-u_y)\rightarrow u_{xy}+v_{yy}=-v_{xx}+u_{xy}\rightarrow v_{yy}+v_{xx}=0$$

❑ مثال حل‌شده

مثال : فرض کنید داشته باشیم $u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$ چنانچه $v(x,y)$ مزدوج همساز این تابع باشد و داشته باشیم $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$، $f'(i)$ مطلوب است محاسبه

حل :

شروع

$$f(z)=u+iv\rightarrow f'(z)=u_x+iv_x$$

$$\begin{cases}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{cases}$$

$$f'(z)=u_x-iu_y$$

ادامه

$$f'(z)=u_x-iu_y$$

$$u_x=2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy-2ye^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

$$u_y=-2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy-2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

$$f'(i)=f'(0,1)=0-i\left(-2e^{0^2-(1)^2}\cos 0\right)=+2ie^{-1}$$

❑ مثال حل‌شده

$u_x = 4x^3 + 2axy^2 + 6x^2 + cy^2$

$u_{xx} = 12x^2 + 2ay^2 + 12x$

مثال : اولاً مقادیر a , b و c را طوری پیدا کنید تا تابع $u(x,y) = x^4 + ax^2y^2 + 2x^3 + by^4 + cxy^2$ تابع همساز باشد. سپس تابع تحلیلی $f(z) = u + iv$ را پیدا کنید.

$u_y = 2ax^2y + 4by^3 + 2cxy$

$u_{yy} = 2ax^2 + 12by^2 + 2cx$

حل : شرط همساز بودن تابع u ایجاب می‌کند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow (12x^2 + 2ay^2 + 12x) + (2ax^2 + 12by^2 + 2cx) = 0$$

$(12 + 2a)x^2 + (2a + 12b)y^2 + (12 + 2c)x = 0$

چون روابط فوق می‌خواهد همواره به ازای هر x و y برقرار باشد، پس داریم:

ضریب x^2: $12 + 2a = 0 \rightarrow a = -6$

ضریب y^2 : $2a + 12b = 0 \rightarrow b = 1$

ضریب x : $12 + 2c = 0 \rightarrow c = -6$

برای به‌دست آوردن $f(z)$ می‌توان از دو روش جلو رفت.

39

❑ ادامه‌ی مثال حل‌شده

الف) نخست مزدوج همساز u را پیدا می‌کنیم پس داریم:

$$u = x^4 - 6x^2y^2 + 2x^3 + y^4 - 6xy^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2 + 6x^2 - 6y^2 \rightarrow v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + 6x^2y - 2y^3 + f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -(-12x^2y + 4y^3 - 12xy) \rightarrow v(x,y) = 4x^3y - 4y^3x + 6x^2y + g(y) \end{cases}$$

$$\rightarrow v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + 6x^2y - 2y^3 + c$$

پس داریم:

$$f(z) = \underbrace{(x^4 - 6x^2y^2 + 2x^3 + y^4 - 6xy^2)}_{u} + i\underbrace{(4x^3y - 4xy^3 + 6x^2y - 2y^3 + c)}_{v}$$

حال با تبدیل $\begin{cases} x \rightarrow z \\ y \rightarrow 0 \end{cases}$ به‌دست می‌آید:

$$f(z) = z^4 + 2z^3 + ic$$

40

ادامه‌ی مثال حل‌شده

ب) بدون نیاز به محاسبه v با توجه به قضیه اول کوشی ـ ریمان می‌توان $f'(z)$ را به‌دست آورد.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\left(4x^3-12xy^2+6x^2-6y^2\right)-i\left(-12x^2y+4y^3-12xy\right)$$

حال با تبدیل $\begin{cases}x\to z\\ y\to 0\end{cases}$ به‌دست می‌آید

$$f'(z)=4z^3+6z^2$$

حال از $f'(z)$ انتگرال می‌گیریم.

$$f(z)=z^4+2z^3+k$$

مثال حل‌شده

مثال: اگر $u(x,y)=2^x\cos(y\ln 2)$ داده شده باشد، مزدوج همساز u و تابع مختلط تحلیلی $f(z)$ کدام است؟

$$\begin{cases}u_x=2^x\ln 2\cos(y\ln 2)=v_y\\ u_y=-2^x\ln 2\sin(y\ln 2)=-v_x\end{cases}\Rightarrow v=2^x\sin(y\ln 2)+c$$

$$f(z)=\underbrace{2^x\cos(y\ln 2)}_{u}+\underbrace{\left(2^x\sin(y\ln 2)+c\right)}_{v}i$$

$x\to z,\ y\to 0$

$$f(z)=2^z+C$$

حال با تبدیل $\begin{cases}x\to z\\ y\to 0\end{cases}$ به‌دست می‌آید:

$$f'(z)=u_x-iu_y$$

$$f'(z)=2^x\ln 2\cos(y\ln 2)+i\left(2^x\ln 2\sin(y\ln 2)\right)$$

$x\to z,\ y=0$

$$f'(z)=2^z\ln 2$$

انتگرال

$$f(z)=2^z+C$$

پایان فصل دوم

43