Date

Subject

(1) تمرین سری ۲ - توابع مختلط

* ج ۱-a)

$$f(z) = \underbrace{|x|}_{u} + i\underbrace{|y|}_{v} \xrightarrow{\text{برای تحلیلی بودن}} \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

$$u_x = \frac{x}{|x|}\ ,\ u_y = 0 \longrightarrow \frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|} \longrightarrow xy > 0$$

در ناحیه اول و سوم تحلیلی است.

$$v_x = 0\ ,\ v_y = \frac{y}{|y|} \longrightarrow |x| = \frac{x|y|}{y} = |x|$$

$$\longrightarrow f(z) = \frac{x|y|}{y} + i|y|$$

$$f'(z) = u_x + iv_y = \frac{|y|}{y} + i\frac{y}{|y|} = \frac{y}{|y|}(1+i)$$

* ج۱-ج)

$$f(z) = (\underbrace{Re\ z}_{u})^2 - i\,(\underbrace{Im\ z}_{v})^2 \longrightarrow f(z) = x^2 - iy^2$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{Re\{z+\Delta z\}^2 - i\,Im\{z+\Delta z\}^2 - x^2 + iy^2}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{x^2 + \Delta x^2 + x2x\Delta x - iy^2 - i\Delta y^2 - i2y\Delta y - x^2 + iy^2}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$\Delta x \to 0 : \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-i\Delta y(\Delta y + 2y)}{i\Delta y} = -2y$$

$$\Delta y \to 0 : \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + \Delta x^2 + 2x\Delta x - x^2}{\Delta x} = 2x$$

$$\longrightarrow 2x = -2y$$

$$x = -y$$

روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم تحلیلی است.

$$x = -y \longrightarrow f(z) = y^2 - iy^2 \longrightarrow \begin{cases} u = y^2 \\ v = -y^2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow f'(z) = 2y - i2y$$

$$\longrightarrow f'(z) = -2x - i2y \qquad x = -y \Rightarrow$$

* ج۲-a)

$u = e^{ax} \cos by$

$u_{xx} = a^2 e^{ax} \cos by \qquad u_{yy} = -b^2 e^{ax} \cos by$

$u_{xx} + u_{yy} = 0 \longrightarrow a^2 e^{ax} \cos by - b^2 e^{ax} \cos by = 0$

$e^{ax} \cos by \,(a^2 - b^2) = 0 \longrightarrow a^2 = b^2 \longrightarrow a = \pm b$

به شرط مساوی بودن a و b ، صحیح است.

$u = e^{ax} \cos ay \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = a e^{ax} \cos ay \overset{*}{=} \frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -a e^{ax} \sin ay$

$v = u + \phi \longrightarrow v = e^{ax} \sin ay + \phi$

$\longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = a e^{ax} \cos ay + \phi' \, *$

برابر قرار دادن روابط ستاره.

$\longrightarrow \phi' = 0 \longrightarrow \phi = Cte.$

$v = e^{ax} \sin ay + C$

جواب 3a)

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}$$

طبق قضیه توابع همساز اسلاید شماره 32 $\Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow v = \int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx = y\int \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\,dx \Rightarrow v = y\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right) + A(y) \quad *$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v = \underbrace{\int \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy}_{} - x^2 \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dy}_{}$$

توجه داشته باشید به حاصل انتگرالها با استفاده از فرمولهای [illegible] و [illegible] که در کتاب [illegible] آورده شده است

$$v = \frac{-y}{2(x^2+y^2)} + \cancel{\frac{1}{2x}\,tg^{-1}\frac{y}{x}} - \cancel{x^2}\left(\frac{y}{2\cancel{x^2}(x^2+y^2)}\right) - \cancel{x^2 \cdot \frac{1}{2x^3}\,tg^{-1}}\frac{y}{x} + B(x)$$

$$v = \frac{-\cancel{2}y}{\cancel{2}(x^2+y^2)} + B(x) \quad **$$

از رابطه * و ** داریم :

$$v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2}(x-iy)$$

بازنویسی براساس z

$x \to z$

$y \to 0$

$$\to f(z) = \frac{1}{z^2}(z) = \frac{1}{z} \to f(z) = \frac{1}{z}$$