تمرین سری ۲ - توابع مختلط

ج ۱-a)

$$f(z) = \underbrace{|x|}_{u} + i\underbrace{|y|}_{v} \xrightarrow{\text{برای تحلیلی بودن}} \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

$$u_x = \frac{x}{|x|}, \quad u_y = 0 \longrightarrow \frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|} \longrightarrow xy > 0$$

در ناحیه اول و سوم تحلیلی است.

$$v_x = 0, \quad v_y = \frac{y}{|y|} \longrightarrow |x| = \frac{x|y|}{y} = |x|$$

$$\longrightarrow f(z) = \frac{x|y|}{y} + i|y|$$

$$f'(z) = u_x + iv(x) = \frac{|y|}{y} + i\frac{y}{|y|} = \frac{y}{|y|}(1+i)$$

ج ۱-b)

$$z = x + iy \longrightarrow \bar{z} = x - iy \longrightarrow f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$u_x = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$v_y = \frac{-\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\xrightarrow{\text{مساوی}} y^2 = -x^2 \longrightarrow x^2 + y^2 = 0$$

دایره‌ای به شعاع صفر به مرکز مبدأ مختصات در $|z| = 0$ تحلیلی است.

و مقدار مشتق صفر است.

ج ۱-۲

$$f(z) = (\underbrace{Re\, z}_{u})^2 - i\,(\underbrace{Im\, z}_{v})^2 \longrightarrow f(z) = x^2 + iy^2$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{Re\{z+\Delta z\}^2 - i\,Im\{z+\Delta z\}^2 - x^2 + iy^2}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{x^2 + \Delta x^2 + x2x\Delta x - iy^2 - i\Delta y^2 - i2y\Delta y - x^2 + iy^2}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x \to 0 : \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{-i\Delta y(\Delta y + 2y)}{i\Delta y} = -2y \\ \\ \Delta y \to 0 : \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x^2 + \Delta x^2 + 2x\Delta x - x^2}{\Delta x} = 2x \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} 2x = -2y \\ x = -y \end{array}$$

روی نیمساز ناحیه دو و چهار تحلیلی است.

$$x = -y \longrightarrow f(z) = y^2 - iy^2 \longrightarrow \begin{cases} u = y^2 \\ v = -y^2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow f'(z) = u_y - iv_y$$

$$\longrightarrow f'(z) = 2x + i2y \qquad x = -y$$

Subject

(۳)

ج ۱-d)

$$f(z) = \underbrace{\cos x}_{u} + i\underbrace{\cos y}_{v}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_x = -\sin x \\ v_y = -\sin y \end{array}\right\} \longrightarrow \sin x = \sin y$$

در این نقاط تحلیلی است. $\begin{cases} x = 2k\pi + y \\ x = 2k\pi + \pi - y \end{cases}$

$$f(z) = \cos(2k\pi + y) + i\cos y$$

$$f(z) = \cos y + i\cos y \longrightarrow f'(z) = -\sin y + i\sin y$$

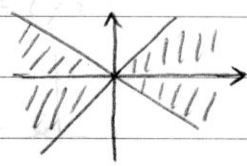
ج ۱-e)

$$u_x = v_y \longrightarrow \frac{x-y}{|x-y|} = \frac{x+y}{|x+y|} \longrightarrow (x-y)(x+y) > 0$$

$$\xrightarrow[x<-y]{x>y} f(z) = x - y + i(x+y) \longrightarrow u_x = 1 \quad v_x = 1$$

تحلیلی

$$f'(z) = \begin{cases} 1+i, & x>0 \\ -1+i, & x<0 \end{cases}$$



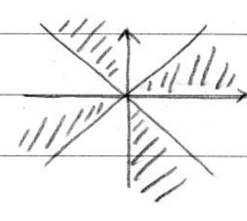
ج ۱-f)

$$v_x = u_y \longrightarrow \frac{2x(x^2-y^2)}{|x^2-y^2|} = \frac{2x^2y}{|xy|} \longrightarrow \frac{x^2-y^2}{|x^2-y^2|} = \frac{xy}{|xy|}$$

$$\longrightarrow xy(x^2-y^2) > 0 \longrightarrow u_x = 2x \quad v_x = 2y$$

تحلیلی

$$f'(z) = \begin{cases} 2x + 2iy, & xy>0 \\ -2x - 2iy, & xy<0 \end{cases}$$



(۴) Subject

ج ۲-a)

$u = e^{ax}\cos by$

$u_{xx} = a^2 e^{ax}\cos by \qquad u_{yy} = -b^2 e^{ax}\cos by$

$u_{xx} + u_{yy} = 0 \longrightarrow a^2 e^{ax}\cos by - b^2 e^{ax}\cos by = 0$

$e^{ax}\cos by\,(a^2 - b^2) = 0 \longrightarrow a^2 = b^2 \longrightarrow a = \pm b$

به شرط مساوی بودن a ، b ، همساز است.

$u = e^{ax}\cos ay \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = a e^{ax}\cos ay = \frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -a e^{ax}\sin ay$

$v(y) = e^{ax}\sin ay + \phi(x) \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -a e^{ax}\cos ay - \phi'(x)$

$\phi(x) = -x \qquad -\phi'(x) = 1 \longrightarrow \phi'(x) = -1$

$v(y) = e^{ax}\sin ay - x$

ج ۲-b)

$u_{xx} = -a^2\cos ax\cosh by \longrightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$

$v_{yy} = b^2\cos ax\cosh by \longrightarrow \cos ax\cosh by\,(b^2 - a^2) = 0$

$b^2 = a^2 \longrightarrow b = \pm a$ همساز است.

ادامه سوال مشتق نسبت a است.

ج ۳-a)

$u_x = e^x \cos y \longrightarrow u_{xx} = e^x \cos y$

$u_y = -e^x \sin y \longrightarrow u_{yy} = -e^x \cos y$

$\Big\} \rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$

همساز است.

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial x} \longrightarrow v = e^x \sin y + C$

$f(z) = u + iv = e^x \cos y + i(e^x \sin y + C)$

$= e^x(\cos y + i \sin y) + C = e^x e^{iy} + C = e^z + C$

ج ۳-c)

$u_x = 2x - 2 \longrightarrow u_{xx} = 2$

$u_y = -2y + 3 \longrightarrow u_{yy} = -2$

$\Big\} \rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$

$2 - 2 = 0$

درمعادله لاپلاس صدق می‌کند پس تابع همساز است.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 2$

$v = 2xy - 2y + \phi(x) \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \phi'(x)$

$\frac{-\partial v}{\partial x} = -2y + 3 \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2y - 3$

$\begin{cases} \phi(x) = -3x \\ \phi'(x) = -3 \end{cases}$

$v = 2xy - 2y - 3x$

ج ۳-d)

$u_x = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$u_{xx} = \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - (4x(x^2+y^2))(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^4}$

Subject
(۶)

$$u_{xx} = \frac{-2x(x^4+y^4+2x^2y^2) - (4x^2+4xy^2)(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u_y = \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2} \rightarrow u_{yy} = \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2) - 2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u_{yy} = \frac{-2x(x^4+y^4+2x^2y^2) + 8xy^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$\rightarrow v_{xx} + v_{yy} \neq 0$ همساز نیست

ج-۳ b)

$u = (x^2-y^2)^2$

$$\begin{cases} u_x = 2\times 2x(x^2-y^2) = 4x^3 - 4xy^2 \\ u_y = -2\times 2y(x^2-y^2) = -4yx^2 + 4y^3 \end{cases}$$

$$\begin{rcases} u_{xx} = 12x^2 - 4y^2 \\ u_{yy} = -4x^2 + 12y^2 \end{rcases} \rightarrow u_{xx} + u_{yy} \neq 0$$

همساز نیست.