به نام خدا

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران
دانشکده مکانیک، برق و کامپیوتر

معادلات دیفرانسیل

DIFFERENTIAL EQUATIONS

فائزه فریور
F.Farivar@srbiau.ac.ir

فصل سوم

1

فصل سوم: سری‌های توانی

- تعاریف اولیه
- تعیین نقاط عادی و غیرعادی (منفرد) یک معادله دیفرانسیل
- حل معادله دیفرانسیل به روش فروبینیوس (روش سری‌های توانی اصلاح شده)
- معادله دیفرانسیل لژاندر
- معادله دیفرانسیل بسل

فصل سوم: سری‌های توانی

❑ تعریفهای اولیه

تعریف ۱: تابع $f(x)$ را در نقطه $x=a$ تحلیلی می‌گویند هر گاه $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای بسط تیلور با $R>0$ باشد (R شعاع همگرایی می‌باشد.)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \;;\; |x-a|<R$$

تعریف ۲: یک سری نامتناهی به شکل زیر را یک سری توانی از $(x-a)$ گویندکه در آن اعداد $a_0, a_1, \dots, a_n$ ضرایب سری و a مرکز سری می‌باشد.

$$a_0+a_1(x-a)+.....+a_n(x-a)^n+.....=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$$

تعریف ۳: در حالت خاص سری توانی حول نقطه صفر عبارت است از:

$$a_0+a_1x+.....+a_nx^n+.....=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

تعریف ۴: شعاع و بازه سری‌های توانی را می‌توان از طریق آزمون‌های نسبت و ریشه به‌دست آورد.

آزمون نسبت: $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

آزمون ریشه: $\frac{1}{R}=\sqrt[n]{|a_n|}$

قضیه: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$y''+p(x)y'+Q(x)y=0$$

چنان‌چه x_0 یک نقطه عادی برای این معادله دیفرانسیل باشد، جواب این معادله دیفرانسیل را می‌توان به فرم یک سری توانی حول نقطه x_0 از جنس بسط تیلور به صورت زیر نوشت:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-x_0)^n$$

$$a_n=\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$$

می‌توان نشان داد شعاع همگرایی این جواب برابر با مینیمم فاصله نقطه x_0 تا نقاط تکین معادله دیفرانسیل مذکور(خواه این نقاط تکین از نوع حقیقی باشند یا مختلط)می‌باشد.

❑ مثال حل‌شده

مثال ۱: هر گاه $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جوابی به صورت سری توانی برای $y''+xy=0$ با $y(0)=1;y'(0)=1$ باشد آن‌گاه ضریب a_3 را بیابید.

با توجه به فرمول گفته شده در بالا ضریب a_3 به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a_3=\frac{y'''(0)}{3!}$$

لذا برای محاسبه $y'''(0)$ باید از معادله فوق یک بار مشتق بگیریم:

$$y''+xy=0 \xrightarrow{\text{مشتق}} y'''+y+xy'=0 \rightarrow y'''(0)+y(0)+(0).y'(0)=0$$

$$\xrightarrow{y(0)=1} y'''(0)=-1 \xrightarrow{\text{طبق فرمول}} a_3=\frac{-1}{3!}=-\frac{1}{6}$$

❑ مثال حل‌شده

مثال ۲: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید. چنان‌چه جواب این معادله دیفرانسیل را به صورت $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ در نظر بگیریم، ضرایب a_3, a_2 را پیدا کنید.

$$\begin{cases} y'' + e^x y' + xy = x + 1 \\ y(0) = 1; y'(0) = 2 \end{cases}$$

اگر به معادله داده شده در $x = 0$ نگاه کنیم آن‌گاه $y''(0)$ به‌دست می‌آید که از روی آن می‌توانیم a_2 را پیدا کنیم.

$$y'' + e^x y' + xy = x + 1 \rightarrow y''(0) + e^0 y'(0) + 0.y(0) = 0 + 1$$

$$\rightarrow y''(0) + 2e^0 = 1 \rightarrow y''(0) = -1 \rightarrow a_2 = \frac{y''(0)}{2!} \rightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$$

❑ ادامه مثال حل‌شده

برای به‌دست آوردن ضریب a_3 باید $y'''(0)$ را به‌دست آوریم و برای به‌دست آوردن $y'''(0)$ باید از معادله داده شده مشتق بگیریم:

$$y'' + e^x y' + xy = x + 1 \xrightarrow{\text{مشتق}} y''' + e^x.y' + e^x y'' + y + xy' = 1$$

$$\rightarrow y'''(0) + e^0.y'(0) + e^0 y''(0) + y(0) + 0.y'(0) = 1$$

$$\rightarrow y'''(0) + 2e^0 - 1e^0 + 1 = 1 \rightarrow y'''(0) = -1 \rightarrow a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} \rightarrow a_3 = -\frac{1}{6}$$

❑ مثال حل‌شده

مثال ۳: معادله دیفرانسیل زیر مفروض است در بسط مکلورن جواب این معادله دیفرانسیل ضریب x^2 کدام است؟

$$\begin{cases} y' + e^y = x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

برای پیدا کردن ضریب x^2 نیاز به این است که مقدار $y''(0)$ را داشته باشیم و برای پیدا کردن مقدار $y''(0)$ بایدابتدا از صورت سؤال $y'(0)$ را یافته و بعد از معادله فوق مشتق بگیریم:

$$y' + e^y = x \xrightarrow{\text{در نقطه x=0 نگاه می‌کنیم}} y'(0) + e^{y(0)} = 0 \rightarrow y'(0) = -e$$

$$y' + e^y = x \xrightarrow{\text{مشتق}} y'' + y'.e^y = 1 \xrightarrow{\text{در نقطه x=0 نگاه می‌کنیم}} y''(0) + y'(0).e^{y(0)} = 1 \rightarrow y''(0) + (-e).e^1 = 1 \rightarrow y''(0) = 1 + e^2$$

$$\rightarrow \text{ضریب } x^2 \text{ در بسط مکلورن} = a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = \frac{1+e^2}{2}$$

❑ مثال حل‌شده

مثال ۴: معادله دیفرانسیل زیر مفروض است. چنان‌چه جواب این معادله دیفرانسیل را به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ در نظر بگیریم، رابطه بازگشتی مربوط به a_n ها را پیدا کنید.

$$y'' + x^2 y = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n x^{n-1} \rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1).a_n.x^{n-2}$$

این مقادیر را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم:

$$y'' + x^2 y = 0 \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n.x^{n-2} + x^2.\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1).a_n.x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^{n+2} = 0$$

قدم اول آن است که توان xها را در تمام سیگماها یکسان کنیم. یعنی توان xها یا $(n-2)$ باشد یا $(n+2)$ باشد که به اختیار یک کدام را انتخاب می‌کنیم که ما در این‌جا از $(n-2)$ استفاده می‌کنیم؛ لذا در جمله دوم $n+2$ را به $n-2$ تبدیل می‌کنیم. پس خواهیم داشت:

ادامه مثال حل‌شده

$$n+2\big|\rightarrow N-2 \;\rightarrow\; n\big|\rightarrow N-4$$

$$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n.x^{n-2} + \sum_{N=4}^{\infty} a_{N-4}.x^{N-2} = 0$$

اینک کافی است با بسط چند جمله اولیه سیگماهای موجود حد پایینی همه آن‌ها را یکسان کنیم و آن‌ها را در قالب یک سیگما بازنویسی کنیم:

$$2a_2x^0 + 6a_3x^1 + \sum_{n=4}^{\infty}\left(n(n-1)a_n + a_{n-4}\right)x^{n-2} = 0$$

پس باید تمام ضرایب توان‌های مختلف x متحد با صفر باشند:

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \\ 6a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0 \\ n(n-1)a_n + a_{n-4} = 0 \rightarrow a_n = -\dfrac{a_{n-4}}{n(n-1)} \end{cases}$$ رابطه بازگشتی:

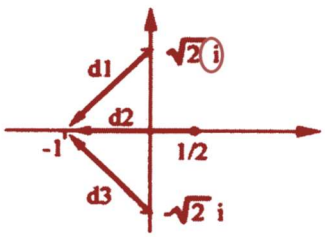
مثال حل‌شده

مثال ۵: معادله دیفرانسیل زیر موجود است. چنان‌چه جواب این معادله دیفرانسیل را به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n$ در نظر بگیریم شعاع همگرایی سری جواب چگونه خواهد بود؟

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+2\right)y'' + y' + 4y = 0$$

بدیهی است جواب به صورت سری توانی حول نقطه $x_0 = -1$ مد نظر است. نقاط غیر عادی معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{2} = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{2} \\ x^2+2 = 0 \rightarrow x \pm \sqrt{2}i \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} d_1 = d_3 = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \\ d_2 = \dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \text{شعاع همگرایی } (R) = \min\left\{\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right\} \rightarrow R = \frac{3}{2}$$

❑ تعیین نقاط عادی و غیرعادی (منفرد) یک معادله دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

اگر توابع $Q(x),P(x)$ هر دو در نقطه $x=x_0$ تحلیلی باشند آن‌گاه هر جواب معادله در نقطه $x=x_0$ تحلیلی است.

نقاط عادی و غیر عادی (تکین) از نوع منظم و یا نامنظم معادله $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ عبارتند از:

❑ ادامه تعیین نقاط عادی و غیرعادی (منفرد) یک معادله دیفرانسیل

۱) نقطه عادی: نقطه $x=x_0$ یک نقطه عادی (معمولی) است اگر هر دو حد $\lim_{x\to x_0} Q(x), \lim_{x\to x_0} P(x)$ موجود باشد.

۲) نقطه غیر عادی (تکین): نقطه $x=x_0$ یک نقطه غیر عادی (تکین یا منفرد) است اگر حداقل یکی از دو حد $\lim_{x\to x_0} Q(x), \lim_{x\to x_0} P(x)$ موجود نباشد.

۳) نقطه غیر عادی (تکین) منظم: نقطه غیرعادی $x=x_0$ را یک نقطه غیر عادی (تکین یا منفرد) منظم است. اگر هر دو حد $\lim_{x\to x_0}(x-x_0).P(x)$ و $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2.Q(x)$ موجود باشد.

۴) نقطه غیر عادی (تکین) نامنظم: نقطه غیرعادی $x=x_0$ را یک نقطه غیر عادی (تکین یا منفرد) نامنظم است اگر حداقل یکی از دو حد $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2.Q(x), \lim_{x\to x_0}(x-x_0)P(x)$ موجود نباشد.

❑ مثال حل‌شده

مثال ۱: نقاط $x=0$ و $x=1$ برای معادله $(x-1)x^2y''-y\sin x=0$ چه نوع نقاطی هستند؟

$$y''-\frac{\sin x}{(x-1)x^2}y=0\Rightarrow p(x)=0\ ;\ Q(x)=\frac{-\sin x}{(x-1)x^2}$$

برای تعیین این که نقطه $x=0\ ,\ x=1$ عادی یا غیر عادی است، باید دو حد $\lim_{x\to0}P(x);\lim_{x\to0}Q(x);\lim_{x\to1}P(x);\lim_{x\to1}Q(x)$ را تشکیل دهیم:

ابتدا به بررسی نقطه $x=0$ می‌پردازیم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}P(x)=0\\ \lim\limits_{x\to0}Q(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin x}{(x-1)x^2}=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$ نقطه غیر عادی است

حال برای تعیین نوع نقطه غیر عادی باید $\lim_{x\to0}(x-0)P(x)\ ;\ \lim_{x\to0}(x-0)^2.Q(x)$ را تعیین کنیم:

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}x.P(x)=\lim_{x\to0}x.0=0\ ;\ \lim_{x\to0}x^2.Q(x)=\lim_{x\to0}x^2.\frac{\sin x}{(x-1)x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{(x-1)}=0$$

پس نقطه $x=0$ یک نقطه غیر عادی (تکین) از نوع منظم است.

❑ ادامه مثال حل‌شده

حال به بررسی نقطه $x=1$ می‌پردازیم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}P(x)=0\\ \lim\limits_{x\to1}Q(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin x}{(x-1)x^2}=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$ پس نقطه $x=1$ یک نقطه غیر عادی است.

برای تعیین نوع نقطه غیر عادی باید $\lim_{x\to1}(x-1).P(x)$ و $\lim_{x\to1}(x-1)^2.Q(x)$ را تعیین کنیم:

$$\Rightarrow\lim_{x\to1}(x-1).P(x)=\lim_{x\to1}(x-1).0=0$$

$$\lim_{x\to1}(x-1)^2.Q(x)=\lim_{x\to1}(x-1)^2.\frac{\sin x}{(x-1).x^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1).\sin x}{x^2}=0$$

پس نقطه $x=1$ یک نقطه غیر عادی (تکین) از نوع منظم است.

❑ مثال حل‌شده

مثال ۲: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید و نوع نقطه $x=0$ را برای آن تعیین کنید.

$$x^2y''+(e^x-1)y'+(\sin^2 x)y=0$$

برای تعیین این که آیا نقطه $x=0$ عادی یا غیر عادی است، باید $\lim_{x\to0}P(x)$ و $\lim_{x\to0}Q(x)$ را تعیین کنیم:

$$y''+\frac{(e^x-1)}{x^2}y'+\frac{\sin^2 x}{x^2}y=0\Rightarrow P(x)=\frac{(e^x-1)}{x^2}\ ;\ Q(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to0}P(x)=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)}{x^2}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\xrightarrow{H}\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2x}=\infty\\&\lim_{x\to0}Q(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\xrightarrow{H}\lim_{x\to0}\frac{2\sin x.\cos x}{2x}=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$ نقطه $x=0$ از نوع غیر عادی است.

برای تعیین نوع نقطه غیر عادی (منظم یا نامنظم) باید $\lim_{x\to0}(x-0)P(x)$ و $\lim_{x\to0}(x-0)^2.Q(x)$ را تعیین کنیم:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to0}(x-0)P(x)=\lim_{x\to0}x.\frac{(e^x-1)}{x^2}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\xrightarrow{H}\lim_{x\to0}\frac{e^x}{1}=1\\&\lim_{x\to0}(x-0)^2.Q(x)=\lim_{x\to0}x^2.\frac{\sin^2 x}{x^2}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$ پس نقطه $x=0$ یک نقطه غیر عادی از نوع منظم است.

❑ مثال حل‌شده

مثال ۳: نقطه $x=0$ برای معادله دیفرانسیل $x^3y''+x^2y'+y=0$ چه نوع نقطه‌ای است؟

برای تعیین این که آیا نقطه $x=0$ عادی یا غیر عادی است، باید $\lim_{x\to0}P(x)\ ;\lim_{x\to0}Q(x)$ را تشکیل دهیم:

$$x^3y''+x^2y'+y=0\Rightarrow y''+\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^3}y=0\Rightarrow P(x)=\frac{1}{x};Q(x)=\frac{1}{x^3}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to0}P(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty\\&\lim_{x\to0}Q(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}=\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$ نقطه $x=0$ از نوع غیر عادی است

برای تعیین این که آیا نقطه $x=0$ (غیر عادی) از نوع منظم یا نامنظم است باید دو حد $\lim_{x\to0}(x-0)^2.Q(x);\lim_{x\to0}(x-0).P(x)$ را تشکیل دهیم:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to0}(x-0).P(x)=\lim_{x\to0}x.\frac{1}{x}=1\\&\lim_{x\to0}(x-0)^2.Q(x)=\lim_{x\to0}x^2.\frac{1}{x^3}=\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$ پس نقطه $x=0$ یک نوع نقطه غیر عادی (تکین) از نوع نامنظم است.

❑ مثال حل‌شده

مثال ۴: معادله دیفرانسیل $y''+\frac{\alpha}{x^s}y'+\frac{\beta}{x^t}y=0$ را در نظر بگیرید که در آن β,α اعداد حقیقی و مخالف صفر و t,s اعداد صحیح مثبت‌اند؛ به ازای چه مقادیری از t,s نقطه $x=0$ یک نقطه غیر عادی نامنظم است؟

اگر بخواهیم نقطه $x=0$ یک نقطه غیر عادی از نوع نامنظم باشد باید لااقل یکی از دو حد $\lim_{x\to0}x^2.Q(x);\lim_{x\to0}x.P(x)$ موجود نباشد:

$$\lim_{x\to0}x.\frac{\alpha}{x^s}=\lim_{x\to0}\frac{\alpha}{x^{s-1}} \qquad \lim_{x\to0}x^2.\frac{\beta}{x^t}=\lim_{x\to0}\frac{\beta}{x^{t-2}} \xrightarrow{\text{شرط موجود نبودن}} \begin{matrix} s-1>0\Rightarrow s>1 \\ t-2>0\Rightarrow t>2 \end{matrix}$$

البته لازم به ذکر است که اگر هر کدام از شرایط به‌دست آمده برقرار باشند نقطه $x=0$ تکین نامنظم است و نیازی نیست هم زمان هر دو شرط ارضا شود.

❑ حل معادله دیفرانسیل به روش فروبینیوس (روش سری‌های توانی اصلاح شده)

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

چنان‌چه x_0 یک نقطه منفرد (غیر عادی) از نوع منظم برای این معادله دیفرانسیل باشد و بخواهیم جواب معادله را به صورت سری توانی حول x_0 بنویسیم باید از روش فروبینیوس استفاده کنیم، برای این منظور معادله مشخصه‌ای به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$r^2+(A-1)r+B=0$$

که در آن:

$$A=\lim_{x\to x_0}(x-x_0).P(x)$$
$$B=\lim_{x\to x_0}(x-x_0).^2Q(x)$$

پس از یافتن ریشه‌های معادله مشخصه می‌توان نشان داد پایه‌های جواب به صورت سری توانی حول نقطه x_0 به فرم زیر قابل بیان است:

❑ ادامه حل معادله دیفرانسیل به روش فروبینیوس (روش سری‌های توانی اصلاح شده)

حالت اول: اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه r_1, r_2 باشد و تفاضل r_1, r_2 عدد صحیح نباشد خواهیم داشت:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r_1}$$
$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2}$$

حالت دوم: اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه r_1, r_2 باشد و تفاضل r_1, r_2 عددی صحیح باشد، داریم: $(r_1 > r_2)$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r_1}$$
$$y_2(x) = k y_1 \mathrm{Ln}(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2}$$

❑ ادامه حل معادله دیفرانسیل به روش فروبینیوس (روش سری‌های توانی اصلاح شده)

حالت سوم: اگر معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف $r_1 = r_2 = r$ باشد داریم:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r}$$
$$y_2(x) = y_1 \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r}$$

در موارد فوق k, b_n, a_n پس از قرار دادن این جواب‌ها در معادله مشخص می‌شوند.

❑ مثال حل‌شده

مثال ۱: معادله دیفرانسیل $x^2y''+\left(e^{2x}-1\right)y'-2y=0$ مفروض است. چنان‌چه بخواهیم جواب این معادله دیفرانسیل را به فرم سری توانی حول نقطه $x=0$ بنویسیم، ریشه‌های معادله مشخصه به روش فروبینیوس کدام است؟

حل:

$$y''+\frac{e^{2x}-1}{x^2}y'-\frac{2}{x^2}y=0\Rightarrow P(x)=\frac{e^{2x}-1}{x^2};Q(x)=\frac{-2}{x^2}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to0}P(x)&=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim_{x\to0}\frac{2e^{2x}}{2x}=\infty\\ \lim_{x\to0}Q(x)&=\lim_{x\to0}\frac{-2}{x^2}=-\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$ بدیهی است نقطه فوق از نوع غیر عادی است

❑ ادامه مثال حل‌شده

حال باید بررسی کنیم که نقطه $x=0$ از نوع تکین منظم است یا نامنظم:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to0}x.P(x)&=\lim_{x\to0}x.\frac{e^{2x}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{2e^{2x}}{1}=2\\ \lim_{x\to0}x^2.Q(x)&=\lim_{x\to0}x^2.\frac{-2}{x^2}=-2\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$ پس نقطه $x=0$ از نوع تکین منظم است

پس برای حل معادله فوق می‌توانیم از روش فروبینیوس استفاده کنیم و برای استفاده از روش فروبینیوس باید معادله مشخصه را تشکیل دهیم و برای تشکیل معادله مشخصه باید ضرایب B,A را تعیین کنیم:

$$A=\lim_{x\to0}x.P(x)=2$$

$$B=\lim_{x\to0}x^2.Q(x)=-2$$

معادله مشخصه: $r^2+(A-1)r+B=0\Rightarrow r^2+r-2=0\Rightarrow r_1=-2;r_2=1$

بحث اضافی: اگر بخواهیم جواب را به صورت سری توانی حول $x_0=0$ بنویسیم از آن‌جا که تفاضل دو ریشه عدد صحیح می‌باشد، داریم:

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}\ ;\ y_2(x)=ky_1Lnx+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-2}$$

❑ مثال حل‌شده

مثال ۲: ساختار پایه‌های جواب معادله دیفرانسیل $x^2y''-\frac{\sin 2x}{3}y'+(x^2+3x)y=0$ به صورت سری توانی حول نقطه $x_0=0$ چگونه خواهد بود؟

حل: با توجه به حل مشابه این مثال نسبت به مثال ۱ برای تعیین این‌که نقطه $x_0=0$ تکین منظم است یا نامنظم از بحث اضافی اجتناب می‌کنیم و به سراغ پیدا کردن ضرایب ثابت B,A معادله مشخصه می رویم:

$$x^2y''-\frac{\sin 2x}{3}y'+(x^2+3x)y=0\Rightarrow P(x)=\frac{-\sin 2x}{3x^2}\ ;Q(x)=\frac{x^2+3x}{x^2}$$

$$\begin{cases}A=\lim\limits_{x\to0}x.P(x)=\lim\limits_{x\to0}x.\frac{-\sin 2x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin 2x}{3x}\xrightarrow{H}A=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\cos 2x}{3}=-\frac{2}{3}\\ B=\lim\limits_{x\to0}x^2.Q(x)=\lim\limits_{x\to0}x^2.\frac{x^2+3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}x^2+3x=0\end{cases}$$

معادله مشخصه: $r^2+(A-1)r+B=0\Rightarrow r^2+\left(-\frac{2}{3}-1\right)r=0\Rightarrow r_1=0;r_2=+\frac{5}{3}$

از آن‌جا که تفاضل دو ریشه عددی صحیح نمی‌باشد لذا خواهیم داشت:

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\frac{5}{3}}=x^{\frac{5}{3}}.\sum_{n=0}^{\infty}a_n.x^n$$

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

❑ مثال حل‌شده

مثال ۳: برای معادله دیفرانسیل $2x^2y''+(-x)y'+(x+1)y=0$ فرم پایه‌های جواب به صورت سری توانی حول نقطه $x=0$ چگونه است؟

حل:

$$2x^2y''-xy'+(x+1)y=0\Rightarrow y''-\frac{x}{2x^2}y'+\frac{x+1}{2x^2}y=0\Rightarrow P(x)=\frac{-1}{2x};Q(x)=\frac{x+1}{2x^2}$$

$$\begin{cases}A=\lim\limits_{x\to0}x.p(x)=\lim\limits_{x\to0}x.\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}\\ B=\lim\limits_{x\to0}x^2.Q(x)=\lim\limits_{x\to0}x^2.\frac{x+1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+1}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

معادله مشخصه: $r_1=1\ ;\ r_2=\frac{1}{2}\ r^2+(A-1)r+B=0\Rightarrow r^2+\left(-\frac{1}{2}-1\right)r+\frac{1}{2}=0\Rightarrow r^2-\frac{3}{2}r+\frac{1}{2}=0\Rightarrow$

از آن‌جا که تفاضل دو ریشه عددی صحیح نمی‌باشد، لذا خواهیم داشت:

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n$$

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

❑ مثال حل‌شده

مثال ۴: دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل $x^2y''+3xy'+(1+x)y=0\ ;\ x>0$ به کدام صورت است؟

حل: از آن‌جا که نقطه $x_0=0$ یک نقطه منفرد منظم است به سراغ پیدا کردن ضرایب ثابت B,A معادله مشخصه می‌پردازیم:

$$x^2y''+3xy'+(1+x)y=0 \Rightarrow P(x)=\frac{3x}{x^2}\ ;\ Q(x)=\frac{1+x}{x^2}$$

$$\begin{cases} A=\lim\limits_{x\to0} x.P(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{x^2}=3 \\ B=\lim\limits_{x\to0} x^2.Q(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2(1+x)}{x^2}=1 \end{cases}$$

معادله مشخصه: $r^2+(A-1)r+B=0\Rightarrow r^2+2r+1=0\Rightarrow (r+1)^2=0\Rightarrow r_1=-1\ ;\ r_2=-1$

از آن‌جا که معادله مشخصه فوق دارای ریشه مضاعف است لذا داریم:

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n-1}\Rightarrow y_1(x)=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$y_2(x)=y_1(x).\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-1}\Rightarrow y_2(x)=y_1(x).\ln x+x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}b_n.x^n$$

❑ معادله دیفرانسیل لژاندر

یک معادله دیفرانسیل لژاندر به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$(1-x^2)y''-2xy'+m(m+1)y=0$$

طبیعی است $x_0=0$ برای این معادله دیفرانسیل یک نقطه عادی است و چنان‌چه جواب این معادله را به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ بنویسیم به جوابی به فرم زیر خواهیم رسید:

$$y=a_0\underbrace{\left[\ \text{سری توانی نامتناهی شامل توان‌های زوج}\ \right]}_{h_m(x)}+a_1\underbrace{\left[\ \text{سری توانی نامتناهی شامل توان‌های فرد}\ \right]}_{q_m(x)}$$

$$y=a_0h_m(x)+a_1q_m(x)$$

اما آن‌چه اهمیت دارد تعیین m است زیرا فرم جواب بستگی به مقدار m است.

❑ ادامه معادله دیفرانسیل لژاندر

حالت اول: برای m های غیر صحیح هر دوپایه جواب دارای تعدادجملات نامتناهی هستند.

حالت دوم: اگر m زوج باشد پایه $h_m(x)$ تبدیل به یک چند جمله‌ای از درجه m با تعداد جملات محدود می‌شود و تعداد جملات با توان فرد نامحدود است ($q_m(x)$ سری نامتناهی باقی می‌ماند).

حالت سوم: اگر m فرد باشد پایه $q_m(x)$ تبدیل به یک چند جمله‌ای از درجه m با تعداد جملات محدود می‌شود و تعداد جملات با توان زوج نامحدود است ($h_m(x)$ سری نامتناهی باقی می‌ماند).

نکته: در حالت دوم و سوم به آن پایه از جواب که دارای تعداد جملات محدود است چند جمله‌ای لژاندر می‌گوییم و آن را با $P_n(x)$ نمایش می‌دهیم.

❑ ادامه معادله دیفرانسیل لژاندر

نکته ۱: بدیهی است تمام چند جمله‌ای‌های زوج لژاندر توابعی زوج و تمام چند جمله‌ای‌های فرد لژاندر توابعی فرد هستند.

نکته ۲: در مورد چند جمله‌ای‌های لژاندر $P_n(x)$ روابط زیر صادق است:

۱) خاصیت تعامد چند جمله‌ای لژاندر:

$$\int_{-1}^{+1} p_m(x).p_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{2}{2m+1} & m = n \end{cases}$$

۲) $p_m(1) = 1$

۳) $p_m(-1) = (-1)^m$

۴) $p_m(-x) = (-1)^m p_m(x)$

❑ ادامه معادله دیفرانسیل لژاندر

نکته ۳: قضیه: اگر تابع $f(x)$ در شرایط قضیه دریکله در بازه (-1,1) صدق کند (در فاصله $-1<x<1$ پیوسته تکه‌ای بوده و در هر نقطه از این بازه مشتق چپ و راست داشته باشد) آن‌گاه در هر نقطه پیوستگی تابع $f(x)$ در بازه $(-1,1)$ داریم:

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m p_m \quad ; c_m=\frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x).p_m(x)dx$$

و در هر نقطه ناپیوستگی تابع سری فوق به $\frac{\left[f(x^+)+f(x^-)\right]}{2}$ همگرا خواهد بود.

❑ مثال حل‌شده

مثال ۱: جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

$$1)\left(1-x^2\right)y''-2xy'+30y=0$$

حل: ابتدا باید m معادله را به‌دست آوریم تا از روی آن جواب را تشخیص دهیم:

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+30y=0\Rightarrow\left(1-x^2\right)y''-2xy'+5(5+1)y=0\Rightarrow m=5$$

پس با توجه به مقدار m که عددی فرد است جواب معادله لژاندر بالا از حالت سوم پیروی می‌کند:

$$m=5\Rightarrow\begin{cases}h_m(x)= x & \text{یک سری نامتناهی شامل توان‌های زوج}\\ q_m(x)= x & \text{یک چند جمله‌ای درجه پنجم شامل توان های فرد}=P_5(x)\end{cases}$$

❑ مثال حل‌شده

$$2)\ \left(1-x^2\right)y''-2xy'+\frac{3}{4}y=0$$

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\frac{3}{4}y=0\Rightarrow\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)y=0\Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

با توجه به این‌که مقدار m عددی صحیح نیست فرم جواب معادله لژاندر از حالت ۱ پیروی می‌کند:

معادله فوق دارای دو پایه جواب است که یکی دارای جملات با توان زوج ودیگری جملات با توان فرد است و تعداد جملات هر دو نامحدود است.

❑ مثال حل‌شده

$$3)\left(1-x^2\right)y''-2xy'+420y=0$$

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+420y=0\Rightarrow\left(1-x^2\right)y''-2xy'+20(20+1)y=0\Rightarrow m=20$$

با توجه به این‌که m عددی زوج است جواب معادله لژاندر بالا از حالت دوم پیروی می‌کند:

$$m=20\Rightarrow\begin{cases}h_m(x)= & x \text{ یک چند جمله‌ای درجه 20 با توان‌های زوج } =p_{20}(x)\\ q_m(x)= & x \text{ یک سری نامتناهی شامل توان‌های فرد}\end{cases}$$

ادامه معادله دیفرانسیل لژاندر

نکته: چند جمله‌ای‌های لژاندر از فرمول ردریگس به‌دست می‌آید:

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m.m!}\frac{d^m}{dx^m}\left((x^2-1)^m\right)$$

مثلاً چند $P_m(x)$ بکار رفته در بالا را به‌دست می‌آوریم:

$$P_0(x)=\frac{1}{2^0.0!}\frac{d^0}{dx^0}\left((x^2-1)^0\right)=1\;;\;P_1(x)=\frac{1}{2^1.1!}\frac{d^1}{dx^1}\left((x^2-1)^1\right)=\frac{2x}{2}=x$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2^2.2!}\frac{d^2}{dx^2}\left((x^2-1)^2\right)=\frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^4-2x^2+1\right)=\frac{1}{8}\left(\left(4x^3-4x\right)'\right)=\frac{1}{8}\left(12x^2-4\right)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

F.Farivar 35

مثال حل‌شده

مثال ۲: چند جمله‌ای $f(x)=x^4$ را بر حسب چند جمله‌ای‌های لژاندر بیان کنید.

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m p_m\;\;;\;c_m=\frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x).p_m(x)dx$$

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m.m!}\frac{d^m}{dx^m}\left((x^2-1)^m\right)$$

راه ۱: چون چند جمله‌ای فوق از درجه چهارم می‌باشد لذا خواهیم داشت:

حال باید با توجه به نکته ۳ مقدار c_nها را پیدا کنیم:

$$x^4=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+c_2p_2(x)+c_3p_3(x)+c_4p_4(x)$$

$$c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^4\right)(1)dx=\frac{1}{5}$$

$$c_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^4\right)(x)dx=0$$

$$c_2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^4\right)\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{4}{7}$$

$$c_3=\frac{7}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^4\right)\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)dx=0$$

$$c_4=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^4\right)\left(\frac{35}{8}x^4-\frac{30}{8}x^2+\frac{3}{8}\right)dx=\frac{8}{35}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$x^4=\frac{1}{5}p_0(x)+\frac{4}{7}p_2(x)+\frac{8}{35}p_4(x)$$

F.Farivar 36

❑ ادامه مثال حل‌شده

راه ۲: چون چند جمله‌ای فوق از درجه چهارم می‌باشد لذا خواهیم داشت:

$$x^4 = c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+c_2p_2(x)+c_3p_3(x)+c_4p_4(x) \quad *$$

مقدار $p_4(x), p_3(x), p_2(x), p_1(x)$ را با توجه به نکته گفته شده در مثال قبل می‌توانیم به‌دست آوریم:

$$p_0(x)=(1)\ ;\ p_1(x)=x;\ p_2(x)=\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right);\ p_3(x)=\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right);\ p_4(x)=\left(\frac{35}{8}x^4-\frac{30}{8}x^2+\frac{3}{8}\right)$$

حال با قرار دادن مقادیر فوق در رابطه * و مساوی قرار دادن ضرایب x خواهیم داشت:

$$x^4 = c_0+c_1x+c_2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)+c_3\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)+c_4\left(\frac{35}{8}x^4-\frac{30}{8}x^2+\frac{3}{8}\right)$$

$$\begin{cases} x^4 \text{ ضریب}: \frac{35}{8}c_4=1\Rightarrow c_4=\frac{8}{35} \\ x^3 \text{ ضریب}: \frac{5}{2}c_3=0\Rightarrow c_3=0 \\ x^2 \text{ ضریب}: \frac{-30}{8}c_4+\frac{3}{2}c_2=0\Rightarrow c_2=\frac{4}{7} \\ x \text{ ضریب}: \frac{-3}{2}c_3+c_1=0\Rightarrow c_1=0 \\ x^0 \text{ ضریب}: c_0-\frac{1}{2}c_2+\frac{3}{8}c_4=0\Rightarrow c_0=\frac{1}{5} \end{cases}$$

پس با جایگزینی ضرایب فوق در معادله (*) خواهیم داشت:

$$x^4=\frac{1}{5}p_0(x)+\frac{4}{7}p_2(x)+\frac{8}{35}p_4(x)$$

❑ مثال حل‌شده

مثال ۳: اگر $p_n(x)$ یک چند جمله‌ای لژاندر باشد مقدار $\int_{-1}^{1}(x+1)p_0(x)dx$ را بیابید.

با توجه به نکته گفته شده در مثال ۲ می‌دانیم $p_0(x)=1$ لذا خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^{1}(x+1)p_0(x)dx=\int_{-1}^{1}(x+1).(1)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{1}=2$$

مثال ۴: اگر $p_m(x)$ مبین چند جمله‌ای‌های لژاندر باشد حاصل انتگرال $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} p_{2k+1}(x).(x^4+\cos x)dx$ را بیابید.

با توجه به این‌که چند جمله‌ای $p_{2k+1}(x)$ یک چند جمله‌ای فرد است وتابع $(x^4+\cos x)$ یک تابع زوج است و ضرب یک تابع زوج و فرد یک تابع فرد است، حاصل انتگرال در بازه متقارن صفر است:

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \underbrace{p_{2k+1}(x)}_{\text{فرد}}.\underbrace{(x^4+\cos x)}_{\text{زوج}}.dx=0$$

❑ مثال حل‌شده

مثال ۵: اگر $p_m(x)$ مبین چند جمله‌ای لژاندر باشد حاصل انتگرال $\int_{-1}^{1} x^2.p_3(x)dx$ را بیابید.

حل: با توجه به این‌که چند جمله‌ای $p_3(x)$، یک تابع فرد است و تابع (x^2) یک تابع زوج است و حاصل‌ضرب دو تابع فرد و زوج، فرد است، حاصل انتگرال در بازه متقارن صفر است:

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{x^2}_{\text{زوج}}.\underbrace{P_3(x)dx}_{\text{فرد}} = 0$$

❑ مثال حل‌شده

مثال ۶: می‌دانیم y_1 جوابی به فرم چند جمله‌ای برای معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y''-2xy'+30y=0$ و y_2 جوابی به صورت چند جمله‌ای برای معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y''-2xy'+56y=0$ می‌باشند؛ حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$$A=\int_{-1}^{+1} y_1.y_2\,dx$$

ابتدا باید فرم جواب دو معادله فوق را به‌دست آوریم:

$$(1-x^2)y''-2xy'+30y=0\Rightarrow(1-x^2)y''-2xy'+5(5+1)y=0\Rightarrow m=5$$

پس با توجه به این‌که $m=5$ یک عدد فرد است، خواهیم داشت: $y_1=P_5(x)$

$$(1-x^2)y''-2xy'+56y=0\Rightarrow(1-x^2)y''-2xy'+7(7+1)y=0\Rightarrow m=7$$

پس با توجه به این‌که $m=7$ یک عدد فرد است، لذا خواهیم داشت:

$$y_2=P_7(x)$$

$$A=\int_{-1}^{+1} y_1.y_2\,dx=\int_{-1}^{+1} P_5(x).P_7(x)dx \xrightarrow{\text{با توجه به نکته ۲ چون } m\neq n \text{ است.}} A=0$$

❑ معادله دیفرانسیل بسل

معادله دیفرانسیل بسل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\upsilon^2\right)y=0$$

برای به‌دست آوردن جواب حول نقطه $x_0=0$ که یک نقطه تکین (منفرد) منظم است کافی است جواب را به فرم $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n.x^{n+r}$ در نظر گرفته و با جایگذاری y و مشتقاتش در معادله، (با استفاده از روش فروبینیوس) مقدار r را به‌دست آوریم:

$$r^2+(a_0-1)r+b_0=0\Rightarrow a_0=1;b_0=-\upsilon^2$$
$$r^2-\upsilon^2=0\Rightarrow r_1=\upsilon;r_2=-\upsilon$$

می‌توان دید ریشه‌های معادله مشخصه $\pm\upsilon$ خواهد بود. اگر جواب معادله را با روش فروبینیوس پیدا کنیم به دو سری توانی نامتناهی پیچیده می‌رسیم:

$$y(x)=cJ_{\upsilon}(x)+kJ_{-\upsilon}(x)$$

❑ ادامه معادله دیفرانسیل بسل

نکته بسیار مهم این‌جا است که اگر υ یک عدد غیرطبیعی باشد می‌توان جواب معادله بسل را به جواب عمومی ارایه شده ارجاع داد.در حالت کلی جواب فوق نمی‌تواند توصیف کننده جواب عمومی معادله بسل مورد نظر باشد، زیرا وقتی υ عدد طبیعی باشد داریم:

$$J_{-\upsilon}(x)=(-1)^{\upsilon}J_{\upsilon}(x)$$

لذا پایه جواب دوم معادله بسل مورد نظر را به طریق دیگری پیدا می‌کنند، جواب عمومی به‌دست آمده برای تمام موارد υ به‌کار می‌رود:

$$y(x)=cJ_{\upsilon}(x)+kY_{\upsilon}(x)$$

نکته: در معادله فوق جواب فروبینیوسی جواب $Y_{\upsilon}(x)$ طبیعت لگاریتمی دارد.

$J_{\upsilon}(x)$: تابع بسل نوع اول از مرتبه υ، جواب معادله بسل بوده و وقتی که x به سمت صفر میل می‌کند این تابع محدود (کراندار) می‌باشد.

$Y_{\upsilon}(x)$: تابع بسل نوع دوم از مرتبه υ یا تابع نیومن، جواب معادله بسل بوده و وقتی که x به سمت صفر میل می‌کند نامحدود (بی‌کران) و مقدار آن $-\infty$ می‌باشد.

ادامه معادله دیفرانسیل بسل- نکات تکمیلی

نکته ۱: می‌توان نشان داد در معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-\upsilon^2)y=0$ با تغییر متغیر $u=\lambda x$ به یک معادله بسل استاندارد می‌رسیم که در نهایت جواب عمومی به فرم زیر خواهد بود:

$$y(x)=AJ_\upsilon(\lambda x)+BY_\upsilon(\lambda x)$$

نکته ۲: می‌توان نشان داد در معادله دیفرانسیل $x^2y''+(2k+1)xy'+(m^2x^{2r}+n^2)y=0$، با فرض $s=\sqrt{k^2-n^2}$ جواب عمومی به فرم زیر است:

$$y(x)=x^{-k}\left(AJ_{\frac{s}{r}}\left(\frac{mx^r}{r}\right)+BY_{\frac{s}{r}}\left(\frac{mx^r}{r}\right)\right)$$

ادامه معادله دیفرانسیل بسل- نکات تکمیلی

نکته ۳: روابط زیر همیشه برقرار است:

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\ ;\ J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

نکته ۴: خواص توابع نوع اول عبارتند از:

1) $J_{-\upsilon}(x)=(-1)^\upsilon J_\upsilon(x)\quad(\upsilon\in N)$

2) $\left(x^\upsilon J_\upsilon(x)\right)'=x^\upsilon J_{\upsilon-1}(x)$

3) $\left(x^{-\upsilon}J_\upsilon(x)\right)'=-x^{-\upsilon}J_{\upsilon+1}(x)$

4) $J_{\upsilon-1}(x)+J_{\upsilon+1}(x)=\frac{2\upsilon}{x}J_\upsilon(x)$

5) $J_{\upsilon-1}(x)-J_{\upsilon+1}(x)=2J_\upsilon'(x)$

6) $\int x^\upsilon J_{\upsilon-1}(x)dx=x^\upsilon J_\upsilon(x)+c$

7) $\int x^{-\upsilon}J_{\upsilon+1}(x)dx=-x^{-\upsilon}J_\upsilon(x)+c$

8) $\int J_{\upsilon+1}(x)dx=\int J_{\upsilon-1}(x)dx-2J_\upsilon(x)$

❑ مثال حل‌شده

مثال ۱: جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را برحسب توابع بسل بنویسید.

$$1)\ x^2y''+xy'+\left(\frac{x^2}{9}-16\right)y=0$$

در این مسئله داریم:

$$\left.\begin{aligned}&2k+1=1\Rightarrow k=0\\&m^2=\frac{1}{9}\Rightarrow m=\frac{1}{3}\\&2r=2\Rightarrow r=1\\&n^2=-16\end{aligned}\right\}\Rightarrow s=\sqrt{k^2-n^2}=\sqrt{0+16}=4$$

پس خواهیم داشت:

$$y(x)=x^{-0}\left(AJ_{\frac{4}{1}}\left(\frac{\frac{1}{3}x^1}{1}\right)+BY_{\frac{4}{1}}\left(\frac{\frac{1}{3}x^1}{1}\right)\right)\Rightarrow y(x)=AJ_4\left(\frac{x}{3}\right)+BY_4\left(\frac{x}{3}\right)$$

❑ مثال حل‌شده

$$2)\ x^2y''+3xy'+xy=0$$

در این مسئله داریم:

$$\left.\begin{aligned}&2k+1=3\Rightarrow k=1\\&m^2=1\Rightarrow m=1\\&2r=1\Rightarrow r=\frac{1}{2}\\&n^2=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow s=\sqrt{k^2-n^2}=\sqrt{1-0}=1$$

پس خواهیم داشت:

$$y(x)=x^{-1}\left(AJ_{\frac{1}{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)+BY_{\frac{1}{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\right)\Rightarrow y(x)=x^{-1}\left(AJ_2\left(2\sqrt{x}\right)+BY_2\left(2\sqrt{x}\right)\right)$$

❑ مثال حل‌شده

$$3)\ x^2y''+5xy'+\left(16x^6-3\right)y=0$$

در این مسئله داریم:

$$\left.\begin{array}{l}2k+1=5\Rightarrow k=2\\ m^2=16\Rightarrow m=4\\ 2r=6\Rightarrow r=3\\ n^2=-3\end{array}\right\}\Rightarrow s=\sqrt{k^2-n^2}=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$$

پس خواهیم داشت:

$$y(x)=x^{-2}\left(AJ_{\frac{\sqrt{7}}{3}}\left(\frac{4x^3}{3}\right)+BY_{\frac{\sqrt{7}}{3}}\left(\frac{4x^3}{3}\right)\right)$$

❑ مثال حل‌شده

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال‌های زیر:

$$I_1=\int x^4J_1(x)dx$$

$$\int x^4J_1(x)dx=\int \underbrace{x^2}_{u}.\underbrace{x^2J_1(x).dx}_{dv}$$

با اعمال روش جز به جز خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x^2=u\\ x^2J_1(x).dx=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2x\\ v=\int x^2J_1(x)dx\xrightarrow{\text{نکته ۴ شماره}}v=x^2J_2(x)\end{cases}$$

$$I_1=u.v-\int v.du=x^4J_2(x)-\int 2x^3J_2(x)\xrightarrow[\text{بدست می‌آید}\ \int 2x^3J_2(x)dx]{\text{با توجه به نکته ۴ شماره ۶ مقدار}}I_1=x^4J_2(x)-2x^3J_3(x)+c$$

$$I_2=\int_0^1 x^3J_0(x)dx$$

$$I_2=\int_0^1 x^3J_0(x)dx=\int_0^1 \underbrace{x^2}_{\downarrow u}\underbrace{x^1J_0(x)dx}_{\downarrow dv}$$

❑ ادامه مثال حل‌شده

با اعمال روش جز به جز داریم:

$$\begin{cases} x^2 = u \\ x^1 J_0(x)dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x \\ v = \int x^1 . J_0(x)dx \end{cases} \xrightarrow{\text{با توجه به نکته ۴ شماره ۶}} v = x^1 J_1(x)$$

$$I_2 = \int_0^1 x^2 . (xJ_0(x))dx = \left[u.v - \int v.du \right]\Big|_0^1 = \left[x^3 . J_1(x) - \int 2x^2 . J_1(x)dx \right]\Big|_0^1 \xrightarrow[\text{را به‌دست می‌آوریم } \int 2x^2 J_1(x)dx]{\text{با توجه به نکته ۴ شماره ۶ مقدار}}$$

$$I_2 = \left[x^3 . J_1(x) - 2x^2 . J_2(x) \right]\Big|_0^1 \Rightarrow I_2 = J_1(1) - 2J_2(1)$$

$$I_3 = \int J_3(x)dx$$

با توجه به نکته ۴ و فرمول ۸ داریم:

$$I_3 = \int J_3(x)dx = \int J_1(x)dx - 2J_2(x)$$

از طرفی با توجه به فرمول ۷ نکته ۴ مقدار $\int x^{\circ} J_1(x)dx$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\int x^{\circ} J_1(x)dx = -x^{\circ} J_0(x) + c$$

پس خواهیم داشت:

$$I_3 = -J_0(x) - 2J_2(x) + c$$

❑ مثال حل‌شده

مثال۳: برای تابع بسل نوع اول داریم: $\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha} J_{\alpha}(x) \right] = x^{\alpha} J_{\alpha-1}(x)$ مقدار $\frac{d(J_{\alpha}(x))}{dx}$ را بیابید:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha} J_{\alpha}(x) \right] = x^{\alpha} J_{\alpha-1}(x) \Rightarrow \alpha x^{\alpha-1} . J_{\alpha}(x) + x^{\alpha} . \frac{d(J_{\alpha}(x))}{dx} = x^{\alpha} . J_{\alpha-1}(x) \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{x^{\alpha} \text{ طرفین را بر}}$$

$$\frac{d(J_{\alpha}(x))}{dx} = J_{\alpha-1}(x) - \frac{\alpha}{x} J_{\alpha}(x)$$

پایان فصل سوم