Note Title 26/02/2022

استقلال و وابستگی بردارها ، مثال ۱ $\quad v_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad v_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad v_3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

روش ۱ $\quad \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = 0$ اگر α های مخالف صفر بدست آمد ، میگوییم که این سه بردار وابسته خطی هستند

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \longrightarrow$$

بردارهای V_1 ، V_2 ، V_3 مستقل خطی هستند

روش ۲ $\quad V = [V_1 \quad V_2 \quad V_3] = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(V) \neq 0 \Rightarrow$ مستقل خطی

مثال 2 / $V_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $V_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$V = [V_1 \quad V_2 \quad V_3] = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \times 2$$

برای محاسبه دترمینان ساده سازی انجام دهیم

خواص دترمینان ها

۱) جابجایی سطرها و ستونها

۲) هر سطر یا ستون را می توان در اسکالر غیر صفر ضرب کرد

۳) اضافه کردن یک سطر یا ستون به یک سطر یا ستون دیگر

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0.5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times 0.5 \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

برای ماتریس ها بالا مثلثی / پایین مثلثی / قطری باشند

دترمینان برابر با حاصلضرب عناصر قطر اصلی می شود

دترمینان $= 2 \times 0 \times 1 = 0 \longrightarrow$ بردارها V_1, V_2, V_3 وابسته خطی هستند

$$\det(V) = 0 \longrightarrow \text{Rank}(V) \neq 3$$

وابستگی خطی داریم

پس $\text{Rank}=1$ یا 2

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = 0$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 0.5\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل}} \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = -4 \end{cases}$$

$$2V_1 + V_2 - 4V_3 = 0 \Longrightarrow V_2 = -2V_1 + 4V_3 \rightsquigarrow$$ ۲ بردار مستقل دارد

$\text{Rank} = 2$ (دو بردار وابسته است)

روش ۲

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \div 2 \\ \times 2 \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times -1 \\ \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}=2$

مثال 3 / $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&-4\end{pmatrix}$ بردار ویژه و مقدار ویژه

$\det(\lambda I-A)=0$ یا $\det(A-\lambda I)=0$ معادله مشخصه سیستم (ماتریس A)

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\3&-4-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-\lambda-4)-6=0\rightarrow \boxed{\lambda^2+3\lambda-10=0 \quad *}$$

مقادیر ویژه $\lambda_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=2\\\lambda_2=-5\end{cases}$

$$Ax=\lambda x\rightarrow(A-\lambda I)x=0$$

$$\begin{pmatrix}1-\lambda&2\\3&-\lambda-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

انتخاب $b=1$

$$\lambda_1=2\rightarrow\begin{pmatrix}-1&2\\3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}-a+2b=0\\3a-6b=0\end{cases}\rightarrow a=2$$

بردار ویژه متناظر با λ_1 $X_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$$\lambda_2 = -5 \to \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 6a+2b=0 \\ 3a+b=0 \end{cases}$$

انتخاب می‌کنم $a=1$

$b=-3$

بردار ویژه متناظر با λ_2 $\quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

مثال ۴: قضیه کیلی همیلتون → (برای مثال قبلی)

معادله مشخصه $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

$$\underset{2\times2}{A}\,\underset{2\times2}{A} + 3\underset{2\times2}{A} - 10\underset{2\times2}{I} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

تبدیل ماتریس $\quad A \xrightarrow{T} \Lambda \qquad\qquad T:$ تبدیل (نگاشت)

$$A \xrightarrow{T} \Lambda$$

$$X \xrightarrow{T} Y$$

$$X = TY$$

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$Ax = \lambda x$$

$$ATY = \lambda TY$$

اسکالر

$$ATY = T(\lambda Y)$$

$$T^{-1}ATY = T^{-1}T\lambda Y$$

$$\underbrace{(T^{-1}AT)}_{\Lambda}Y = \lambda Y$$ ← بردار ویژه جدید $\Longrightarrow \Lambda Y = \lambda Y$

ماتریس جدید Λ

مقادیر ویژه که از یک فضا به فضای دیگر تغییر نمی کنند