تبدیل ماتریسی

$$A \xrightarrow{T} \Lambda$$

تبدیل (نگاشت) T:

$$A \xrightarrow{T} \Lambda$$

$$X \xrightarrow{T} Y$$

$$\boxed{X = TY}$$

$$\boxed{\Lambda = T^{-1}AT}$$

$$Ax = \lambda x$$

$$ATY = \lambda TY$$

اعمال

$$ATY = T(\lambda Y)$$

$$T^{-1}ATY = T^{-1}T\lambda Y$$

$$\underbrace{(T^{-1}AT)}_{\Lambda} Y = \lambda Y \rightarrow$$ بردار ویژه جدید

ماتریس جدید Λ

$$\Longrightarrow \Lambda Y = \lambda Y$$

مقادیر ویژه که از یک فضا به فضای دیگر تغییر نمی کنند

$$A_{n\times n} \xrightarrow[\text{تبدیل}]{T} \Lambda$$

مقادیر ویژه $\lambda_{1,2,\dots,n}$ $\qquad$ $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$

$\downarrow$

بردارهای ویژه $x_1, x_2, \dots x_n$ $\qquad$ $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$

$X = TY$

$Y = T^{-1}X$

بردارهای ویژه جدید

و λ_i $(i=1,2,\dots,n)$ درصفحه جدید تغییر نمی‌کنند.

$\Lambda = T^{-1}AT$

$$A \xrightarrow{T} \Lambda = T^{-1}AT$$

تبدیل :

$A \xrightarrow{T} \Lambda = T^{-1}AT$

- قطری سازی :

A غیرقطری $\xrightarrow{T}$ Λ قطری

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{صفر} \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ \text{صفر} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$

$X_1 \quad X_2 \quad \quad X_n$

ماتریس T (تبدیل T) چه باشد که Λ قطری شود ؟

$$T = [X_1, X_2, \cdots, X_n] \Rightarrow \Lambda = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{صفر} \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ \text{صفر} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

که بردار ویژه متناظر با λ_1

حالتهای خاص : همبسته Companion

Companion I

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

صفر

صفر

$\det(A-\lambda I)=0$

معادله مشخصه

$$a_0 + a_1\lambda^1 + a_2\lambda^2 + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + 1\,\lambda^n = 0$$

معادله مشخصه مرتبه n

$$= \quad 1\,\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda_1 + a_0 = 0$$

مقدار ویژه λ_i بردار ویژه $X_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix}$

همبسته نوع I $\xrightarrow{\text{قطری}}$ $T = ?\ ,\ \Lambda = ?$; $\Lambda = T^{-1}AT$

قطری‌ساز $T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \cdots \ x_n]$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \longrightarrow \Lambda = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{صفر} \\ & \lambda_2 & \\ \text{صفر} & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

بردار ویژه متناظر با λ_1 که

بردار ویژه ی متناظر با λ_2

همبسته نوع II

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{-a_0 \quad -a_1 \quad -a_2 \quad \cdots \quad -a_{n-1}} \\ 1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \\ \vdots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1 \quad 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

صفر

صفر

عناصر زیرقطر اصلی یک هستند

معادله مشخصه همانند نوع قبلی است.

$$1\,\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda^1 + a_0 = 0$$

مقادیر ویژه λ_i :

بردار ویژه :
$$\begin{pmatrix} \lambda_i^{n-1} \\ \vdots \\ \lambda_i^2 \\ \lambda_i^1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

مثال :

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$ نوع II

$$1\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$ نوع I

$$1\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

مثال :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$ نوع I

$$\rightarrow \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 0 = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda(\lambda+2)(\lambda+1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = -2$$
$$\lambda_3 = -1$$

كـ تساهم لـ λ

$$X_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad X_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \Lambda = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

روش ۱

$$\boxed{Ax = \lambda x} \rightarrow (A - \lambda_i I)\, x_i = 0$$

✓ ✓ ? ✓

روش دیگری در محاسبه بردار ویژه

(متناظر با λ_i)

$$\lambda_i \rightsquigarrow adj\,(\lambda I - A) \rightsquigarrow$$

بردار ویژه یکی از ستون‌های ماتریس $adj\,(\lambda_i I - A)$ است

مثال,

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 0 \\ -26 & 0 & 1 \\ -24 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A^{-1} معکوس ماتریس $= \frac{1}{|A|} adj(A)$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \longrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

$$eig(A) \longrightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = -4$$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda+9 & -1 & 0 \\ 26 & \lambda & -1 \\ 24 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow adj(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda & 1 \\ -26\lambda - 24 & \lambda^2 + 9\lambda & \lambda + 9 \\ -24\lambda & -24 & \lambda^2 + 9\lambda + 24 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{adj}\left(\underset{\lambda_1=-2}{-2}I - A\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 28 & -14 & 7 \\ 48 & -24 & 12 \end{pmatrix}$$

$\times 4$ $\quad$ $\times(-2)$

$\lambda_1=-2$ بردار ویژه $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$

تمرین : بردارهای ویژه X_2 و X_3 (متناظر با مقدار ویژه λ_2) و (λ_3 〃 〃) را بدست آورید.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\operatorname{adj}(A) \right)$$

ترانهاده و مثبت و منفی درایه‌ها را باید در نظر بگیریم

$\boxed{\text{برای ماتریس } A}$

MATLAB :

eig (A) , rank (A) , det (A) , inv (A)

مقادیر ویژه ، رتبه ، دترمینان ، معکوس

برای ماتریس‌ها بالا مثلثی / پایین مثلثی / قطری باشند

دترمینان برابر با حاصلضرب عناصر قطر اصلی می‌شود و عناصر قطر اصلی همان مقادیر ویژه هستند.

قطری سازی:

A : مقادیر ویژه حقیقی و غیر تکراری $\xrightarrow{T}$ $\underbrace{\Lambda}_{\text{قطری}} = T^{-1}AT$

$T = [x_1 , x_2 , \dots \; x_n]$

A مقادیر ویژه مزدوج مختلط $\begin{cases} \sigma + j\omega \rightarrow x_1 \\ \sigma - j\omega \rightarrow x_2 \end{cases}$ $\xrightarrow{T=?}$ $\Lambda = T^{-1}AT$ ← قطری بلوکی

مقادیر ویژه   مختلط   بردار ویژه

$$\left\{\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} \sigma_1 + j\omega_1 \\ \sigma_1 - j\omega_1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \sigma_2 + j\omega_2 \\ \sigma_2 - j\omega_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} x_3 \\ x_4 \end{array} \\ \vdots & \end{array}\right.$$

$T = ?$

$$\underset{\text{قطری بلوکی}}{\Lambda} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \sigma_1 \end{pmatrix} & \text{صفر} & \\ \text{صفر} & \begin{pmatrix} \sigma_2 & \omega_2 \\ -\omega_2 & \sigma_2 \end{pmatrix} & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

متناظر با هر زوج $\underbrace{\text{مقادیر ویژه مزدوج}}_{\sigma \pm j\omega}$ مختلط یک بلوک $\begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$ ایجاد می‌شود

$$T = \left[Re(x_1),\ Im(x_1),\ Re(x_3),\ Im(x_3)\ \cdots \right]$$

مثال $A_{7\times7}$: سه مقدار ویژه حقیقی غیرتکراری و دو زوج مختلط

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$\lambda_1 \to x_1, \quad \lambda_2 \to x_2, \quad \lambda_3 \to x_3$

$\lambda_4, \lambda_5 = \sigma_1 \pm j\omega_1 \to x_4, x_5$

$\lambda_6, \lambda_7 = \sigma_2 \pm j\omega_2 \to x_6, x_7$

λ_1

λ_2

λ_3

$\lambda_4 = \sigma_1 + j\omega_1$

$\lambda_5 = \sigma_1 - j\omega_1$

$\lambda_6 = \sigma_2 + j\omega_2$

$\lambda_7 = \sigma_2 - j\omega_2$

$$\Lambda = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & & & & \text{صفر} \\ & \boxed{\lambda_2} & & & \\ & & \boxed{\lambda_3} & & \\ & & & \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \sigma_1 \end{pmatrix}}_{2\times2} & \\ \text{صفر} & & & & \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_2 & \omega_2 \\ -\omega_2 & \sigma_2 \end{pmatrix}}_{2\times2} \end{pmatrix}_{7\times7}$$

$$T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ , Re(x_4) , Im(x_4) \ , Re(x_6) \ , Im(x_6)]$$

مثال : جنبش سر

λ_1

λ_2

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_4\\ \lambda_5\end{array}\right\}\sigma_1+j\omega_1 \quad\Longrightarrow\quad T=? \quad\longrightarrow\quad \Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{صفر} \\ & \boxed{\lambda_2} & & \\ & & \begin{bmatrix}\sigma_1 & \omega_1\\ -\omega_1 & \sigma_1\end{bmatrix} & \\ & \text{صفر} & & \begin{bmatrix}\sigma_2 & +\omega_2\\ -\omega_2 & \sigma_2\end{bmatrix} & \\ & & & & \boxed{\lambda_3} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_6\\ \lambda_7\end{array}\right\}\sigma_2+j\omega_2$$

λ_3

$$T=\left[x_1,\ x_2,\ Re(x_4),\ Im(x_4),\ Re(x_6),\ Im(x_6),\ x_7\right]$$

مقادیر ویژه حقیقی و غیرتکراری ← قطری ✓ T

مقادیر ویژه مزدوج مختلط ← قطری - بلوکی ✓ T

$$\Lambda = T^{-1} A T$$

مقادیر ویژه حقیقی غیرتکراری
و مقادیر ویژه مزدوج مختلط ← قطری - بلوکی ✓ T

مقادیر ویژه حقیقی و تکراری ← بلوک جردن

ترکیب مقادیر ویژه حقیقی
تکراری و غیرتکراری ← قطری بلوکی
که بلوک جردن

حل :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \det\underbrace{\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}}_{} = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} \begin{cases} \nearrow \lambda_1 = -1+i \\ \searrow \lambda_2 = -1-i \end{cases}$$

$$Ax = \lambda x \longrightarrow (A - \lambda I)x = 0$$

$$\lambda_1 = -1+i \qquad \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}^{x_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} (1-i)a - b = 0 \\ 2a - (1+i)b = 0 \end{cases} \leadsto X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+j \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1-i \qquad \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 2 & -1+i \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leadsto \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-j \end{pmatrix}$$

$$T = \left(\mathrm{Re}(x_1) \;,\; \mathrm{Im}(x_1) \right) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathrm{Re}(x_1) \quad \mathrm{Im}(x_1) \end{array}$$

$$\Lambda = T^{-1} A T = \text{محاسبه را انجام دهید} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

قطری بلوکی ؛ یک بلوک 2x2 دارد

$A \longrightarrow$ مقادیر ویژه حقیقی و تکراری باشند

مثال : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_{1,2,3} = 1, 1, 2$

مقادیر ویژه تکراری

مقدار ویژه غیرتکراری

بردار ویژه X_1 متناظر با λ_1

بردار ویژه X_2 متناظر با λ_1 (چون $\lambda_1 = \lambda_2$)

تعمیم یافته

بردار ویژه X_3 (متناظر با $\lambda_3 = 2$)

x_1 برای $\rightsquigarrow Ax_1 = \lambda_1 x_1 \longrightarrow$ x_1 بردار ویژه مستقل متناظر با λ_1

$Ax_1 - \lambda_1 x_1 = 0$

x_2 برای $\rightsquigarrow$ $\boxed{Ax_2 - \lambda_2 x_2 = x_1} \longrightarrow x_2$ بردار ویژه تعمیم یافته

بردار ویژه تعمیم یافته

x_3 برای $\quad Ax_3 = \lambda_3 x_3 \longrightarrow$ x_3 بردار ویژه متناظر با λ_3

بلوک جردن

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$T^{-1} = ?$$

$$T = [\, x_1 \quad x_2 \quad x_3 \,]$$

بردار ویژه تعمیم یافته

بلوک جردن برای مقادیر ویژه حقیقی و تکراری

λ با n بار تکرار

بلوک جردن :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \text{صفر} \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ \text{صفر} & & & & \lambda \end{pmatrix}_{n\times n}$$

مثال : $A \rightarrow$ مقادیر ویژه : λ_1 غیرتکراری ، $\underbrace{\lambda_2 , \lambda_3 , \lambda_4}_{\text{باهم برابرند}}$

$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ سه‌تکراری

$\lambda_1 \rightarrow x_1$

$\lambda_2 \rightarrow x_2$ ، $\lambda_3 \rightarrow$ تعمیم‌یافته ، $\lambda_4 \rightarrow$ تعمیم‌یافته

$A x_1 - \lambda_1 x_1 = 0 \longrightarrow x_1$ ✓

$A x_2 - \lambda_2 x_2 = 0 \longrightarrow x_2$ ✓

$A x_3 - \lambda_3 x_3 = X_2 \longrightarrow x_3$ ✓

$A x_4 - \lambda_4 x_4 = X_3 \longrightarrow x_4$ ✓

بردارهای ویژه تعمیم‌یافته

$$T = \begin{bmatrix} \underbrace{x_1}_{\text{بردار}} & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \longrightarrow \Lambda = T^{-1} A T = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & & & \\ \hline & \lambda_2 & 1 & 0 \\ & 0 & \lambda_2 & 1 \\ & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right]$$

بلوک جردن

$$T' = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \end{bmatrix} \longrightarrow \Lambda = T'^{-1} A T' = \left[\begin{array}{c|c} \text{بلوک جردن} & \\ \hline & \lambda_1 \end{array}\right]$$

نکته: تعداد بلوک های جردن متناظر با یک مقدار ویژه $\overset{\text{برابر است با}}{=}$ تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر با آن مقدار ویژه