به نام خدا

اگر مقادیر ویژه ماتریس $A_{n\times n}$ مقادیر ویژه تکراری باشند، ممکن است که کمتر از n بردارهای ویژه ناوابسته خطی وجود داشته باشد و در این صورت قطری سازی ماتریس A غیر ممکن است. در چنین حالتی ماتریس A را می‌توان با یک تبدیل همانندی به صورت کانونیکال جردن نوشت که خواص زیر را دارد:

① تمامی عناصر قطری ماتریس مقادیر ویژه A هستند.

② تمامی عناصر زیر قطر اصلی صفر هستند.

③ هنگامی که عناصر مجاور در قطر اصلی مساوی هستند، تعداد معینی عناصر واحد در فوق قطر قرار می‌گیرند.

* فرض کنید ماتریس $A_{n\times n}$، یک مقدار ویژه تکراری با تکرار k دارد و n-k مقدار ویژه غیر تکراری دارد.

آنگاه صورت کانونیکال جردن آن به صورت زیر می‌شود.

$$J_{n\times n}=\begin{bmatrix} J_{P_1} & & & & & \\ & J_{P_2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & J_{P_\alpha} & & \\ & & & & \lambda_{k+1} & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}_{n\times n}$$

که در آن J_{P_1}، J_{P_2}، ...، J_{P_α} بلوک های جردن مربوط به مقدار ویژه تکراری هستند.

هر یک از بلوک های جردن به صورت:

$$J_{P_i}=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}_{P_i\times P_i}$$

که P_i ها درجه بلوک جردن نامیده می‌شوند و

$$P_1+P_2+\cdots+P_\alpha=k$$

تعداد تکرار مقدار ویژه λ

تعداد بلوک های جردن متناظر با مقدار ویژه λ_i (α) در صورت کانونیکال جردن، برابر با تعداد بردارهای ویژه ناوابسته خطی (مستقل خطی) متناظر با آن مقدار ویژه است.

$\alpha = \nu(\lambda_i I - A)$ ← فضای تهی ماتریس $\lambda_i I - A$

نکته: اگر $\alpha = k$ باشد، λ_i، k بردار ویژه ناوابسته خطی خواهد داشت و قطری سازی کامل A امکان پذیر است.

نکته: اگر $\alpha = 1$ باشد، λ_i فقط یک بردار ویژه ناوابسته خطی خواهد داشت و یک بلوک جردن نیز متناظر با آن در صورت قطری بلوکی ظاهر می شود.

مثال: فرض کنیم $A_{7\times 7}$ بوده و مقادیر ویژه آن به صورت $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_6, \lambda_7$ باشد و داشته باشیم

$\alpha_1 = \nu(\lambda_1 I - A) = 1$ ← تعداد بلوک جردن برای λ_1 $\qquad$ λ_1: تکرار $k_1 = 3$

$\alpha_2 = \nu(\lambda_2 I - A) = 1$ ← تعداد بلوک جردن برای λ_2 $\qquad$ λ_2: تکرار $k_2 = 2$

← بلوک جردن به صورت زیر خواهد بود:

$$J = \left[\begin{array}{ccc|cc|c|c}
\lambda_1 & 1 & 0 & & & & \\
0 & \lambda_1 & 1 & & 0 & & \\
0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\
\hline
 & & & \lambda_2 & 1 & & \\
 & & & 0 & \lambda_2 & & \\
\hline
 & 0 & & & & \lambda_6 & 0 \\
\hline
 & & & & & & \lambda_7
\end{array}\right]$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -7 & -9 & -5 \end{bmatrix} \Longrightarrow |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^3 (\lambda + 2)$$

لذا یک مقدار ویژه با تکرار 3 در -1

و یک مقدار ویژه با تکرار 1 در -2 دارد.

$$\alpha_1 = \nu(\lambda_1 I - A) = \nu((-1)I - A) = \nu \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} = 1$$

لذا یک بلوک جردن با درجه 3 داریم:

$$J = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow |\lambda I - A| = (\lambda - 3)^2 (\lambda - 5)$$

لذا یک مقدار ویژه با تکرار 2 در 3

و یک مقدار ویژه در 5 دارد.

$$\alpha_1 = \nu(\lambda_1 I - A) = \nu(3I - A) = \nu \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

لذا دو بلوک جردن برای مقدار ویژه $\lambda_1 = 3$ داریم:

$$J = \left[\begin{array}{c|c|c} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

مثال: فرض کنیم $A_{7\times 7}$ بوده و مقادیر ویژه آن به صورت $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_6, \lambda_7$ باشند، داشته باشیم

$k_1 = 3$ ← تعداد تکرار λ_1

$k_2 = 2$ ← تعداد تکرار λ_2

$\alpha_1 = \nu(\lambda_1 I - A) = 2 \rightarrow$ تعداد بلوک جردن برای λ_1

$\alpha_2 = \nu(\lambda_2 I - A) = 2 \rightarrow$ تعداد بلوک جردن برای λ_2

در این حالت صورت کانونیکال جردن به صورت زیر خواهد بود.

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & \\ 0 & \lambda_1 & & & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \lambda_2 & & \\ & 0 & & & & \lambda_6 & \\ & & & & & & \lambda_7 \end{bmatrix}$$